Федеральное агентство по образованию Российской Федерации

Филиал «СЕВМАШВТУЗ» государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский морской технический университет» в г. Северодвинске

Д.В. Кузьмин

КИНЕМАТИКА

Учебное пособие

Северодвинск
2004

УДК 531 (075.8)

Кузьмин Д.В. Кинематика: учебное пособие. – Северодвинск: РИО Севмашвтуза, 2004. – 50 с.

Ответственный редактор ст. преподаватель каф. «Проектирование подъемно-транспортного и технологического оборудования» Севмашвтуза Л.А. Ковалев.

Рецензенты: Зав. каф. «Робототехнические системы, машины и оборудование лесного компекса» Архангельского государственного технического университета,

к.т.н., доцент Б.К. Микитюк;

Ведущий инженер НИТИЦ ФГУП ПО «Севмаш»
Ю.П. Голованов.

Учебное пособие «Кинематика» состоит из трех разделов: «Кинематика точки», «Кинематика твердого тела» и «Основы кинематики механической системы». Целью учебного пособия является оказание помощи студентам в установлении прочных взаимосвязей между лекционным курсом теоретической механики (раздел «Кинематика») и задачами, решаемыми на практических занятиях. В пособии дано строгое изложение основного теоретического материала с использованием современных математических методов и приведены подробно описанные примеры решения задач. Разделы «Кинематика точки» и «Кинематика твердого тела» предназначены для всех студентов, изучающих теоретическую механику; раздел «Основы кинематики механической системы» предназначен для студентов, учебная программа которых предусматривает углубленное изучение теоретической механики в течение двух семестров. Учебное пособие «Кинематика» может быть полезно студентам немеханических инженерных специальностей, изучающих дисциплину «Прикладная механика».

Печатается по решению редакционно-издательского совета Севмашвтуза

ISBN

СОДЕРЖАНИЕ

1. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Основные понятия

Кинематика точки изучает движение точки в трехмерном пространстве относительно начальной точки отсчета, которая полагается неподвижной. Например, начало отсчета может принадлежать неподвижному твердому телу. Тогда, совершая движение, точка будет изменять свое положение относительно начала отсчета с течением времени. Задать движение точки означает дать способ определения положения, скорости и ускорения точки в любой момент времени. Следовательно, *задачей кинематики точки* является разработка способов задания движения точки, а также методов определения ее скорости и ускорения. Положение точки *P* относительно начала отсчета удобно определять с помощью *радиус-вектора положения* (рис. 1):

$$\bar{r} = \bar{i} \cdot x + \bar{j} \cdot y + \bar{k} \cdot z, \tag{1}$$

где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - единичные векторы, задающие в пространстве направления осей Ox, Oy, Oz декартовой системы координат, x, y, z - координаты радиус-вектора положения точки. Так как координаты начала отсчета $x_O = y_O = z_O = 0$, то $x = x_P - x_O = x_P$, $y = y_P - y_O = y_P$, $z = z_P - z_O = z_P$, т.е. координаты вектора положения совпадают с координатами точки *P*.

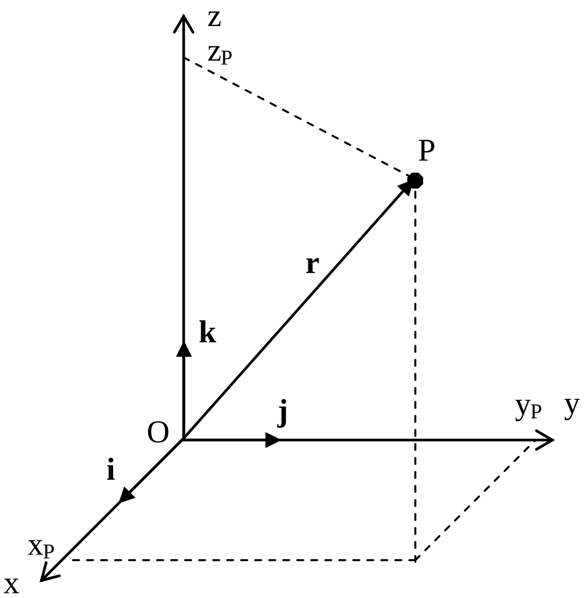


Рис. 1

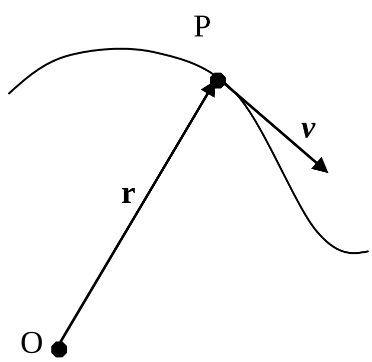


Рис. 2

Выражение (1) называется *геометрической* формой задания $\bar{r}$. Оно читается следующим образом: «чтобы получить $\bar{r}$, отложим расстояние *x* в направлении $\bar{i}$, прибавим к нему расстояние *y* в направлении $\bar{j}$, затем прибавим еще расстояние *z* в направлении $\bar{k}$ ». Кроме этого, существует *координатная* форма задания $\bar{r}$ в виде вектора-столбца:

$$\bar{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Формы задания вектора (1) и (2) используются в задачах математического описания движения точки.

Векторный способ задания движения точки

Радиус-вектор $\bar{r}$ можно задать как вектор-функцию времени: $\bar{r} = \bar{r}(t)$. С течением времени конец вектора $\bar{r}$ описывает траекторию точки *P* (рис.2). Производная от $\bar{r}$ по времени *t* называется *скоростью* точки *P*:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} \tag{3}$$

Производная от $\bar{v}$ называется *ускорением* точки:

$$\overline{w} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \tag{4}$$

Вектор скорости всегда направлен по касательной к траектории в точке *P*, вектор ускорения – внутрь траектории, как будет показано в п. 1.4.

Координатный способ задания движения точки

Запишем вектор-функцию $\bar{r}(t)$ в форме (1): $\bar{r}(t) = \bar{i} \cdot x(t) + \bar{j} \cdot y(t) + \bar{k} \cdot z(t)$. Тогда скорость точки *P* будет иметь вид $\bar{v}(t) = \bar{i} \cdot \dot{x}(t) + \bar{j} \cdot \dot{y}(t) + \bar{k} \cdot \dot{z}(t)$, где точкой обозначаются полные производные по времени *t*, т.е. $\dot{x}(t) \equiv \frac{dx(t)}{dt}$, $\dot{y}(t) \equiv \frac{dy(t)}{dt}$, $\dot{z}(t) \equiv \frac{dz(t)}{dt}$. Эти производные координат вектора $\bar{r}$ имеют геометрический смысл *проекций* вектора $\bar{v}$ на оси *Ox*, *Oy* и *Oz*.

Величина скорости $\bar{v}$ определяется равенством

$$v = |\bar{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\ , \qquad (5)$$

а направление вектора $\bar{v}$ относительно осей *Ox*, *Oy* и *Oz* – <u>*направляющими косинусами*</u>[1]

$$\cos(\bar{v}, \bar{i}) = \frac{\dot{x}}{v},\ \cos(\bar{v}, \bar{j}) = \frac{\dot{y}}{v},\ \cos(\bar{v}, \bar{k}) = \frac{\dot{z}}{v}. \qquad (6)$$

Ускорение точки *P* определяется равенством $\bar{w}(t) = \bar{i} \cdot \ddot{x}(t) + \bar{j} \cdot \ddot{y}(t) + \bar{k} \cdot \ddot{z}(t)$, где двумя точками обозначены вторые производные по времени *t*: $\ddot{x}(t) \equiv \dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$, $\ddot{y}(t) \equiv \dfrac{d^2y(t)}{dt^2}$, $\ddot{z}(t) \equiv \dfrac{d^2z(t)}{dt^2}$. Эти производные координат вектора $\bar{r}$ имеют геометрический смысл проекций вектора $\bar{w}$ на оси *Ox*, *Oy* и *Oz*. Величина вектора ускорения и его направления определяются равенствами, аналогичными (5), (6). Таким образом, движение точки будет полностью заданным, если известны законы изменения ее координат: $x(t), y(t), z(t)$.

<u>*Задача*</u>

Задан закон движения точки *P*: $x = a\cos bt$, $y = a\sin bt$, $z = ct$, где a, b, c - постоянные. Найти траекторию, скорость и ускорение точки.

<u>*Решение*</u>

Возведя в квадрат первые равенства, и сложив их, получим $x^2 + y^2 = a^2$. Это показывает, что точка Р движется по поверхности цилиндра радиуса *a*, ось которого совпадает с осью *Oz* (рис. 3). Пусть φ – угол между проекцией *OA* радиус-вектора *OP* на плоскость *Oxy* и осью *Ox*. Тогда $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, $\varphi = bt$, $z = \dfrac{c\varphi}{b}$. Следовательно, отрезок *OA* равномерно вращается, а точка *P* равномерно перемещается по образующей *AP*. Таким образом, точка движется по винтовой линии.

[1] Запись $\cos(\bar{v}, \bar{i})$ следует читать: «косинус угла между векторами $\bar{v}$ и $\bar{i}$ ».

Определим скорость точки *P*: $\dot{x}=-ab\sin bt$, $\dot{y}=ab\cos bt$, $\dot{z}=c$. Модуль скорости $v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}=\sqrt{a^2b^2+c^2}$, т.е. величина вектора скорости постоянна, а ее направление изменяется со временем.

Ускорение точки *P*: $\ddot{x}=-ab^2\cos bt$, $\ddot{y}=-ab^2\sin bt$, $\ddot{z}=0$. Модуль ускорения $w=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}=ab^2$. Направляющие косинусы вектора ускорения $\cos(\overline{w},\bar{i})=\frac{\ddot{x}}{w}=-\cos bt$, $\cos(\overline{w},\bar{j})=\frac{\ddot{y}}{w}=-\sin bt$, $\cos(\overline{w},\bar{k})=\frac{\ddot{z}}{w}=0$. Следовательно, ускорение точки P имеет постоянную величину и направлено по внутренней нормали цилиндра (рис. 3).

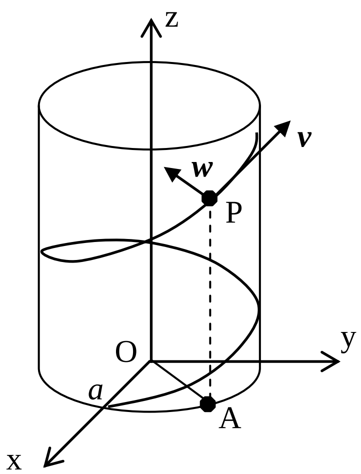


Рис. 3

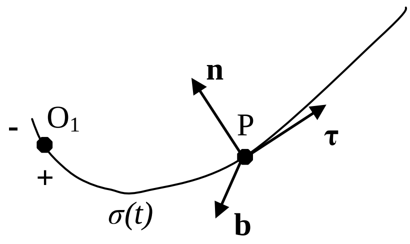


Рис. 4

Естественный способ задания движения точки

Можно задать движение точки *P*, заранее определив ее траекторию *σ* относительно точки *O*. Тогда, на известной траектории выбирается начало отсчета дуговой координаты *σ(t)* точка O_1 и положительное направление отсчета положения точки *P* (рис. 4). Такой способ задания движения точки называется <u>*естественным*</u>.

Для вычисления скорости и ускорения точки Р при естественном способе задания движения введем <u>*правую тройку единичных векторов*</u> $\bar{\tau},\bar{n},\bar{b}$. Вектор $\bar{\tau}$ направлен по касательной к траектории в точке *P*, вектор $\bar{n}$ - по нормали. Вектор $\bar{b}$ перпендикулярен плоскости векторов $\bar{\tau},\bar{n}$. Радиус-вектор точки *P* относительно точки *O* будет сложной функцией времени: $\bar{r}(t)=\bar{r}(\sigma(t))$. Тогда скорость точки *P* будет определяться равенством

$$\bar{v}=\frac{d\bar{r}(\sigma(t))}{dt}=\frac{d\bar{r}}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dt}. \tag{7}$$

Вычислим производную $\frac{d\bar{r}}{d\sigma}$. Она равна $\lim\limits_{\Delta\sigma\to 0}\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta\sigma}$. Ясно, что при $\Delta\sigma\to 0$ длина хорды $\Delta\bar{r}$ будет приближаться к длине соответствующей дуги $\Delta\sigma$ и $\left|\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta\sigma}\right|\to 1$. При этом $\Delta\bar{r}$ займет положение <u>*касательной*</u> к *σ* в точке *P*. Следовательно, $\frac{d\bar{r}}{d\sigma}=\bar{\tau}$ и равенство (7) запишется в виде

$$\bar{v}=\bar{\tau}\dot{\sigma}. \tag{8}$$

Равенство (8) показывает, что скорость точки *P* всегда направлена по касательной к траектории. Ускорение точки Р, с учетом (8), имеет вид

$$\bar{w}=\frac{d\bar{v}}{dt}=\frac{d\bar{\tau}}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dt}\dot{\sigma}+\bar{\tau}\ddot{\sigma}. \tag{9}$$

Вычислим производную $\frac{d\bar{\tau}}{d\sigma}=\lim\limits_{\Delta\sigma\to 0}\frac{\Delta\bar{\tau}}{\Delta\sigma}$. Ясно, что единичный вектор $\bar{\tau}$ изменяется только по направлению при движении точки *P* по траектории *σ*. Приращение дуги представим в виде $\Delta\sigma=\rho\Delta\varphi$, где ρ – радиус кривизны траектории, *Δφ* – приращение угла поворота радиуса кривизны. Тогда можно записать $\lim\limits_{\Delta\sigma\to 0}\frac{\Delta\bar{\tau}}{\Delta\sigma}=\frac{1}{\rho}\lim\limits_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\Delta\bar{\tau}}{\Delta\varphi}$. При $\Delta\varphi\to 0$ длина $\Delta\bar{\tau}$ будет приближаться к величине угла $\Delta\varphi$ и $\left|\frac{\Delta\bar{\tau}}{\Delta\varphi}\right|\to 1$. При этом $\Delta\bar{\tau}$ займет положение <u>*нормали*</u> к *σ* в точке *P*. Следовательно, $\frac{d\bar{\tau}}{d\sigma}=\frac{1}{\rho}\bar{n}$ и равенство (9) запишется в виде

$$\bar{w}=\frac{1}{\rho}\bar{n}\dot{\sigma}^2+\bar{\tau}\ddot{\sigma}=\bar{w}_n+\bar{w}_\tau. \tag{10}$$

Соотношение (10) называется теоремой о разложении полного ускорения точки на <u>*нормальную*</u> $\bar{w}_n$ и <u>тангенциальную</u> $\bar{w}_\tau$ составляющие. Нормальное ускорение $\overline{w}_n$ точки объясняется наличием кривизны траектории и характеризует изменение вектора скорости точки P по направлению. Тангенциальное ускорение $\overline{w}_\tau$ характеризует изменение вектора скорости точки P по величине. Если траектория точки – кривая, то в любом случае $\overline{w}_n \neq 0$ и вектор полного ускорения $\overline{w}$ будет всегда направлен внутрь траектории.

<u>*Задача*</u>

Точка P движется по окружности радиуса R, закон движения точки $\sigma = \sigma(t)$. Определить модуль полного ускорения точки и угол между полным ускорением и его нормальной составляющей.

<u>*Решение*</u>

Так как $\sigma(t) = R\varphi(t)$, из (8) и (10) следует, что $\overline{v} = R\dot{\varphi}\overline{\tau}$, $\overline{w}_\tau = R\ddot{\varphi}\overline{\tau}$, $\overline{w}_n = R\dot{\varphi}^2\overline{n}$. Величины $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$ являются соответственно <u>*угловой скоростью*</u> и <u>*угловым ускорением*</u> радиуса $OP = R$ (рис. 5). Обозначая $\dot{\varphi} = \omega$, $\ddot{\varphi} = \varepsilon$, получим выражение для модуля ускорения точки:

$$w = \sqrt{w_n^2 + w_\tau^2} = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} \ .$$

Угол между полным ускорением и его нормальной составляющей определяется из равенства $tg\beta = \dfrac{w_\tau}{w_n} = \dfrac{|\varepsilon|}{\omega^2}$.

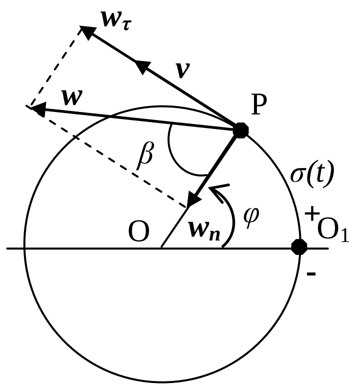


Рис. 5

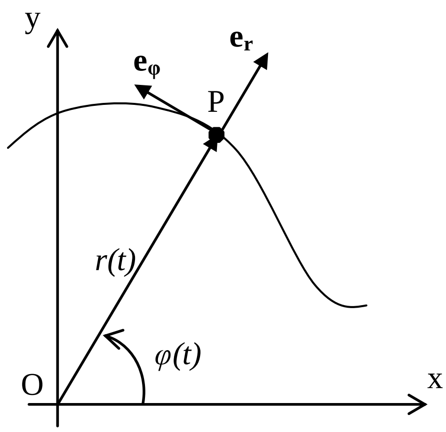


Рис. 6

Движение точки в полярных координатах

Если точка P движется в заданной плоскости, то, помимо декартовых координат *x(t)* и *y(t)* движение может быть задано законами изменения длины радиус-вектора $r = r(t)$ и угла его поворота в плоскости $\varphi = \varphi(t)$ (рис 6). Такую систему координат называют *полярной*. Единичные векторы $\bar{e}_r$ и $\bar{e}_\varphi$ задают направления двух взаимно перпендикулярных осей: *радиальной* и *трансверсальной* соответственно. Проекции вектора скорости точки P на эти оси называются соответственно радиальной и трансверсальной скоростями:

$$v_r = \dot{r}\,,\ v_\varphi = r\dot{\varphi}\,. \tag{11}$$

Для проекций ускорения точки *P*

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\,,\ w_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\,. \tag{12}$$

Связь между декартовыми и полярными координатами выражается соотношениями: $x(t) = r(t)\cos\varphi(t)$, $y(t) = r(t)\sin\varphi(t)$.

Задача

Движение точки *P* задано уравнениями: $r = at$, $\varphi = bt$, $a, b = const$. Найти траекторию, скорость и ускорение точки.

Решение

Исключив из данных уравнений время *t*, получим уравнение траектории $r = \dfrac{a}{b}\varphi$. Эта линия называется *спиралью Архимеда*. Согласно (11) имеем

$$v_r = \dot{r} = a\,,\ v_\varphi = abt\,.$$

Величина скорости точки *P*: $v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = a\sqrt{1 + b^2t^2}$. Согласно (12) имеем

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -ab^2t\,,\ w_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 2ab\,.$$

Величина ускорения точки *P*: $w = \sqrt{w_r^2 + w_\varphi^2} = ab\sqrt{4 + b^2t^2}$.

Вопросы для проверки усвоения материала

1) Сформулируйте задачу кинематики точки.
2) Что такое радиус-вектор положения точки?
3) Перечислите способы задания движения точки.
4) Дайте определения скорости и ускорения точки.

5) Как направлена скорость точки?
6) Сформулируйте теорему о разложении полного ускорения точки.
7) Почему ускорение точки всегда направлено внутрь траектории?
8) Какую систему координат называют полярной?
9) Как направлены радиальная и трансверсальная оси?
10) Как связаны между собой декартовая и полярная системы координат?

2. КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Основные понятия

Абсолютно твердое тело – это такая механическая система, расстояние между любыми двумя точками которой всегда постоянно. Для краткости, абсолютно твердое тело называют просто *твердым телом*. Пусть твердое тело представляет собой механическую систему из некоторого числа точек P_ν, $\nu = 1,2,\ldots,N$. Тогда для любой пары точек (P_i, P_j) из этой системы справедливо утверждение $r_{ji} = \left|\bar{r}_j - \bar{r}_i\right| = const$ (рис. 7).

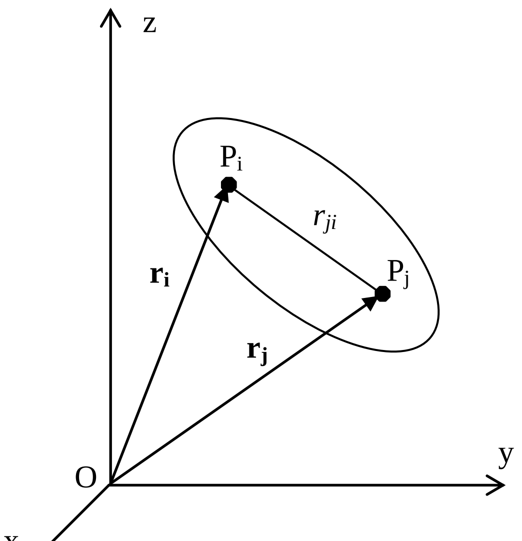


Рис. 7

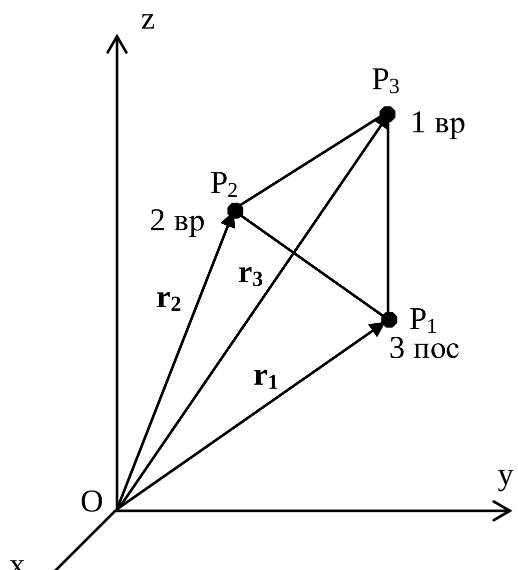


Рис. 8

Задача кинематики твердого тела состоит в разработке способов задания его движения, а также способов определения скоростей и ускорений точек твердого тела при помощи кинематических характеристик, общих для всего твердого тела.

Число степеней свободы твердого тела

Исследуем простейшее твердое тело – жесткий треугольник с вершинами P_1, P_2 , P_3, свободно движущийся в пространстве (рис. 8). Вершина P_1 имеет три поступательных степени свободы. Тогда вершина P_2 жестко связанная с P_1, будет иметь возможность перемещаться относительно P_1 по поверхности сферы радиуса r_{12}. Это составляет две вращательные степени свободы. Наконец, вершина P_3, жестко связанная с отрезком P_1P_2, может только двигаться по окружности относительно этого отрезка, что дает еще одну вращательную степень свободы. Итак, у твердого тела *шесть степеней свободы*: *три поступательных* и *три вращательных*.

Векторно-матричный способ описания движения твердого тела

Дадим понятие перемещения твердого тела. *Перемещением* называют переход твердого тела из начального положения в конечное. К простейшим перемещениям относят поступательное и вращательное перемещения. Если перемещения всех точек твердого тела геометрически равны, то перемещение называется *поступательным*. Перемещение твердого тела, при котором его конечное положение получается из начального путем поворота вокруг неподвижной прямой, называется *вращательным*, а сама неподвижная прямая – *осью вращения*. Понятие перемещения не включает в себя сведения о том, каким образом оно зависит от времени t. Если задать непрерывную зависимость перемещения от времени, то можно говорить о *движении* твердого тела. Следовательно, разработка способа задания движения твердого тела фактически сводится к математическому описанию его простейших перемещений в трехмерном пространстве. Таким математическим описанием является *векторно-матричный способ*, который в настоящее время широко используется в задачах проектирования и управления техническими системами.

Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки

Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг точки *O* (рис. 9). Система координат *OXYZ* – неподвижная, а *Oxyz* – жестко связана с вращающимся твердым телом и потому является подвижной. Направления осей этих систем координат задаются соответствующими тройками единичных векторов $\bar{i}_0, \bar{j}_0, \bar{k}_0$ и $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1$. Пусть известно положение точки *P* в системе координат *Oxyz*:[2]

$$\bar{\rho} = \bar{i}_1 \cdot x + \bar{j}_1 \cdot y + \bar{k}_1 \cdot z \, .$$

Вычислим положение точки *P* в неподвижной системе координат *OXYZ*. Для этого спроецируем вектор $\bar{\rho}$ на оси *OX*, *OY* и *OZ*:

$$X = \bar{i}_0 \cdot \bar{\rho} = \bar{i}_0 \cdot \left(\bar{i}_1 x + \bar{j}_1 y + \bar{k}_1 z\right),$$

$$Y = \bar{j}_0 \cdot \bar{\rho} = \bar{j}_0 \cdot \left(\bar{i}_1 x + \bar{j}_1 y + \bar{k}_1 z\right),$$

$$Z = \bar{k}_0 \cdot \bar{\rho} = \bar{k}_0 \cdot \left(\bar{i}_1 x + \bar{j}_1 y + \bar{k}_1 z\right).$$

Полученные соотношения связывают положение точки *P* в неподвижной и подвижной системах координат. Запишем эти соотношения в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{i}_0 \cdot \bar{i}_1 & \bar{i}_0 \cdot \bar{j}_1 & \bar{i}_0 \cdot \bar{k}_1 \\ \bar{j}_0 \cdot \bar{i}_1 & \bar{j}_0 \cdot \bar{j}_1 & \bar{j}_0 \cdot \bar{k}_1 \\ \bar{k}_0 \cdot \bar{i}_1 & \bar{k}_0 \cdot \bar{j}_1 & \bar{k}_0 \cdot \bar{k}_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

или, окончательно,

$$\bar{r} = A \cdot \bar{\rho} \, . \tag{1}$$

[2] Вектор $\bar{\rho}$ - это тот же вектор $\bar{r}$, только заданный в системе координат *Oxyz*.

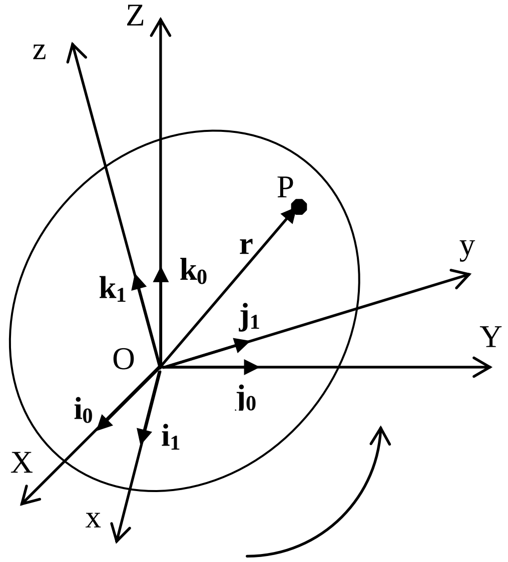


Рис. 9

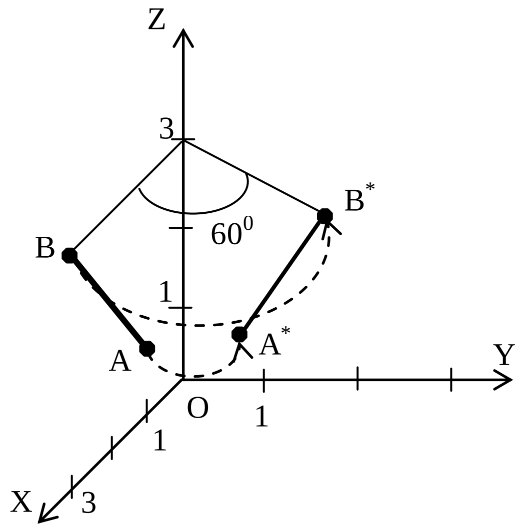


Рис. 10

Матрица A в формуле (1) называется *матрицей поворота*. Она является ортогональной, т.е. $A^{-1} = A^{T}$.[3] Ее определитель по абсолютной величине всегда равен единице. Элементами матрицы A являются *косинусы* углов между осями неподвижной и подвижной систем координат:

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\bar{i}_0, \bar{i}_1) & \cos(\bar{i}_0, \bar{j}_1) & \cos(\bar{i}_0, \bar{k}_1) \\ \cos(\bar{j}_0, \bar{i}_1) & \cos(\bar{j}_0, \bar{j}_1) & \cos(\bar{j}_0, \bar{k}_1) \\ \cos(\bar{k}_0, \bar{i}_1) & \cos(\bar{k}_0, \bar{j}_1) & \cos(\bar{k}_0, \bar{k}_1) \end{bmatrix}.$$

В общем случае матрица A задает перемещение твердого тела вокруг произвольной оси, проходящей через точку O. Повороты твердого тела вокруг неподвижных осей OX, OY и OZ называют *элементарными*, а соответствующие им матрицы

$$A_{\alpha,X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{bmatrix}, \quad A_{\varphi,Y} = \begin{bmatrix} c\varphi & 0 & s\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\varphi & 0 & c\varphi \end{bmatrix}, \quad A_{\theta,Z} = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

матрицами элементарных поворотов.[4] Обозначения читаются так: $A_{\alpha,X}$ - матрица поворота вокруг оси OX на угол α. Матрица поворота твердого тела

---

[3] Матрицей, обратной A, называют матрицу A^{-1}, такую, что $A^{-1}A=E$, где E – единичная матрица. Матрица A^{T} - транспонированная, в которой строки и столбцы меняются местами.

[4] В целях сокращения записей формул в технической литературе используются обозначения:

вокруг неподвижной точки может быть представлена в виде произведения матриц элементарных поворотов, например:

$$A = A_{\theta,Z} \cdot A_{\varphi,Y} \cdot A_{\alpha,X} ,$$

т.е. твердое тело сначала поворачивается вокруг оси *OX* на угол α, затем вокруг оси *OY* на угол φ, и еще вокруг оси *OZ* на угол θ. Изменение порядка умножения матриц элементарных поворотов в общем случае приведет к изменению матрицы результирующего поворота, т.к. произведение матриц не обладает свойством коммутативности ($A \cdot B \neq B \cdot A$). Если определить матрицу поворота как функцию времени $A = A(t)$, то будет задано движение твердого тела вокруг неподвижной точки: $\bar{r}(t) = A(t) \cdot \bar{\rho}$.

Задача

В неподвижной системе координат *OXYZ* заданы радиус-векторы концов тонкого стержня *AB*: $\bar{r}_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\bar{r}_B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T$. Определить положение стержня после его поворота вокруг оси *OZ* на угол $\theta = 60^0$.

Решение

Введем систему координат *Oxyz*, жестко связанную со стержнем. Пусть начальное положение этой системы координат совпадает с положением осей неподвижной системы координат *OXYZ*. Тогда радиус-векторы точек А и В в этих системах координат будут совпадать: $\bar{\rho}_A = \bar{r}_A$, $\bar{\rho}_B = \bar{r}_B$. Положение стержня после указанного поворота определится из соотношений:

$$\bar{r}_A^* = A_{\theta,Z} \cdot \bar{r}_A , \; \bar{r}_B^* = A_{\theta,Z} \cdot \bar{r}_B .$$

Выполняя вычисления, получим:

$$\bar{r}_A^* = \begin{bmatrix} c60^0 & -s60^0 & 0 \\ s60^0 & c60^0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{bmatrix};$$

$c\alpha \equiv \cos\alpha$, $s\alpha \equiv \sin\alpha$.

$$\bar{r}_B^* = \begin{bmatrix} c60^0 & -s60^0 & 0 \\ s60^0 & c60^0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Начальное и конечное положения стержня приведены на рис. 10.

Произвольное движение твердого тела

Пусть теперь система координат *OXYZ* перемещается относительно неподвижной (абсолютной) системы координат O_aXYZ таким образом, что соответствующие оси всегда остаются параллельными: $OX \parallel O_aX$, $OY \parallel O_aY$, $OZ \parallel O_aZ$ (рис. 11). Система координат *Oxyz*, по-прежнему, жестко связана с твердым телом. Тогда положение некоторой точки *P* тела, совершающего произвольное перемещение, определится из соотношения:

$$\bar{R} = \bar{R}_O + \bar{r} = \bar{R}_O + A \cdot \bar{\rho}\,, \qquad (2)$$

где $\bar{R}_0$ - радиус-вектор центра *O* в неподвижной системе координат, $\bar{\rho}$ - радиус-вектор точки *P* в системе координат *Oxyz*.

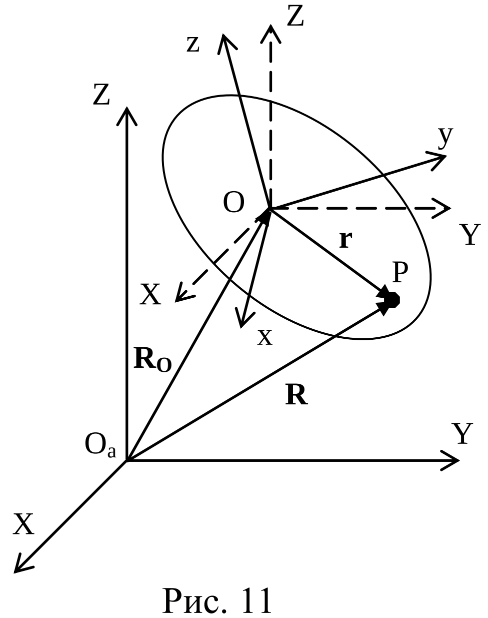


Рис. 11

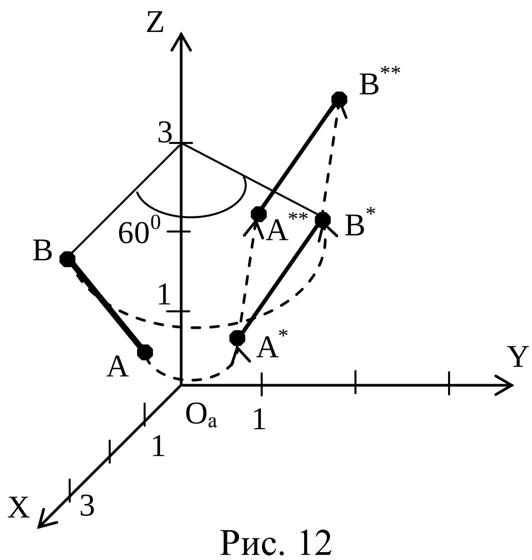


Рис. 12

Теперь, если задать $\overline{R}_O = \overline{R}_O(t)$ и $A = A(t)$, то будет задано <u>*движение*</u> твердого тела в абсолютной системе координат.

<u>*Задача*</u>

Определить конечное положение стержня АВ из предыдущей задачи, если стержень после поворота на угол $\theta = 60^0$ вокруг оси OZ совершил поступательное перемещение $\overline{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$.

<u>*Решение*</u>

Введем абсолютную систему координат O_aXYZ так, чтобы в начальном положении системы координат O_aXYZ и $OXYZ$ совпадали. Тогда конечные положения точек А и В стержня будут получены из соотношений:

$$\overline{r}_A^{**} = \overline{R} + \overline{r}_A^{*}, \; \overline{r}_B^{**} = \overline{R} + \overline{r}_B^{*}.$$

Выполняя вычисления, получим:

$$\overline{r}_A^{**} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2} \\ 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \\ 3 \end{bmatrix}, \; \overline{r}_B^{**} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{3}{2} \\ 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ 2 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{2 + 3\sqrt{3}}{2} \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Начальное, промежуточное и конечное положения стержня, а также его перемещения изображены на рис. 12.

2.4. Скорость точки твердого тела в случае его произвольного движения

Пусть задан радиус-вектор некоторого центра O твердого тела $\overline{R}_O(t)$ и матрица поворота $A(t)$. Тогда скорость любой точки P, принадлежащей этому телу определится из соотношения:

$$\overline{v} = \frac{d}{dt}\left(\overline{R}_O + A \cdot \overline{\rho}\right) = \overline{v}_O + \overline{\omega} \times \overline{r}, \qquad (3)$$

где $\bar{v}_O$ - абсолютная скорость центра *O*, $\bar{\omega}$ - *угловая скорость* твердого тела. Координаты вектора $\bar{\omega}$ в системе координат O_aXYZ определяются как элементы кососимметрической матрицы[5]

$$\dot{A}A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_Z & \omega_Y \\ \omega_Z & 0 & -\omega_X \\ -\omega_Y & \omega_X & 0 \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

Скорость центра $\bar{v}_O$ и угловая скорость $\bar{\omega}$ являются величинами, общими для всего твердого тела. Согласно (3), с их помощью можно вычислить скорость любой точки твердого тела относительно неподвижного начала отсчета.

Задача

Вал, на котором укреплена зенитная пушка, вращается вокруг своей оси OX^* по закону $\alpha(t) = 2t, рад$ и одновременно поворачивается вокруг оси *OZ* неподвижной системы координат *OXYZ* по закону $\theta(t) = 3t, рад$ (рис. 13). Определить угловую скорость вала.

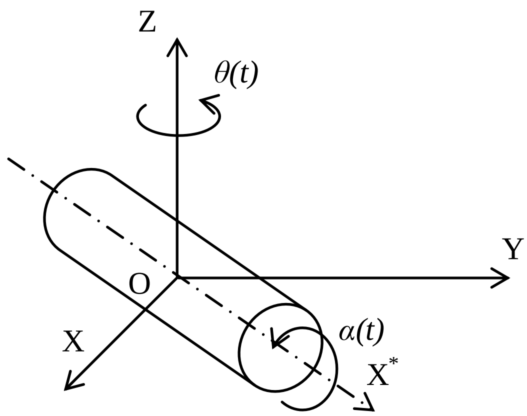


Рис. 13

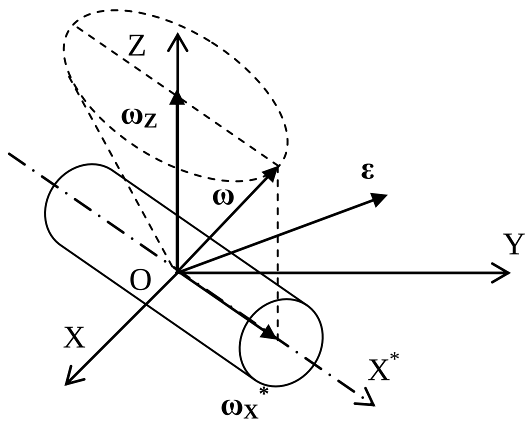


Рис. 14

Решение

По условию задачи, вал вращается вокруг неподвижной точки *O*. Найдем матрицу поворота вала:

---

[5] Кососимметрической называют такую матрицу *B*, для которой справедливо равенство: $B^T = -B$.

$$
A = A_{\theta,Z} \cdot A_{\alpha,X} = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta \cdot c\alpha & s\theta \cdot s\alpha \\ s\theta & c\theta \cdot c\alpha & -c\theta \cdot s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{bmatrix}.
$$

Вектор угловой скорости вала $\overline{\omega}$ найдем согласно (4). Для этого выполним следующие вычисления:

$$
A^T = \begin{bmatrix} c\theta & s\theta & 0 \\ -s\theta \cdot c\alpha & c\theta \cdot c\alpha & s\alpha \\ s\theta \cdot s\alpha & -c\theta \cdot s\alpha & c\alpha \end{bmatrix}; \; \dot{A} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta} \cdot s\theta & -\dot{\theta} \cdot c\theta \cdot c\alpha + \dot{\alpha} \cdot s\theta \cdot s\alpha & \dot{\theta} \cdot c\theta \cdot s\alpha + \dot{\alpha} \cdot s\theta \cdot c\alpha \\ \dot{\theta} \cdot c\theta & -\dot{\theta} \cdot s\theta \cdot c\alpha - \dot{\alpha} \cdot c\theta \cdot s\alpha & \dot{\theta} \cdot s\theta \cdot s\alpha - \dot{\alpha} \cdot c\theta \cdot c\alpha \\ 0 & \dot{\alpha} \cdot c\alpha & -\dot{\alpha} \cdot s\alpha \end{bmatrix}.
$$

Учитывая, что $A^{-1} = A^T$, получаем:

$$
\dot{A} \cdot A^{-1} = \dot{A} \cdot A^T = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} & \dot{\alpha} \cdot s\theta \\ \dot{\theta} & 0 & -\dot{\alpha} \cdot c\theta \\ -\dot{\alpha} \cdot s\theta & \dot{\alpha} \cdot c\theta & 0 \end{bmatrix}, \text{ откуда } \overline{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \cdot c\theta \\ \dot{\alpha} \cdot s\theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}.
$$

Модуль вектора угловой скорости: $\omega = \sqrt{\omega_X^2 + \omega_Y^2 + \omega_Z^2} = \sqrt{\dot{\theta}^2 + \dot{\alpha}^2}$. Подставляя исходные данные $\alpha(t) = 2t$, $\theta(t) = 3t$ в полученные соотношения, окончательно будем иметь:

$$
\overline{\omega} = \begin{bmatrix} 2\cos 3t \\ 2\sin 3t \\ 3 \end{bmatrix}, \; \omega = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}, \, рад/с .
$$

Таким образом, вектор угловой скорости вала имеет постоянную величину $\omega = \sqrt{13}, рад/с$ и вращается вокруг оси OZ по закону $\theta(t) = 3t$ (рис. 14).

2.5. Ускорение точки твердого тела в случае его произвольного движения

Ускорение точки P, принадлежащей твердому телу, вычисляется в соответствии с соотношением:

$$
\overline{w} = \frac{d}{dt}\left(\overline{v}_O + \overline{\omega} \times \overline{r}\right) = \overline{w}_O + \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{r}), \tag{5}
$$

где $\overline{w}_O$ - ускорение центра O, $\bar{\varepsilon} = \dot{\overline{\omega}}$ - *угловое ускорение* твердого тела. Слагаемое $\bar{\varepsilon} \times \bar{r}$ называют *вращательным*, а $\overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \bar{r})$ - *осестремительным* ускорением. Ускорение центра $\overline{w}_O$ и угловое ускорение $\bar{\varepsilon}$ являются величинами, общими для всего твердого тела.

Задача

Вычислить угловое ускорение вала из задачи п. 2.4.

Решение

Угловое ускорение найдем, продифференцировав по времени t вектор угловой скорости:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\overline{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} 2\cos 3t \\ 2\sin 3t \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6\sin 3t \\ 6\cos 3t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Модуль углового ускорения: $\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_X^2 + \varepsilon_Y^2 + \varepsilon_Z^2} = \sqrt{36} = 6, \textit{рад}/c^2$. Таким образом, угловое ускорение вала постоянно по величине, находится в плоскости OXY нормально к $\overline{\omega}_{X^*}$ и вращается вокруг оси OZ вместе с вектором $\overline{\omega}$ (рис. 14).

Частные случаи движения твердого тела

Твердые тела, входящие в состав механизмов и машин, не могут двигаться произвольно. Их движения ограничиваются за счет контакта в подвижных соединениях механизма и, как правило, представляют собой следующие частные случаи: *вращение вокруг неподвижной оси* и *плоское движение*.

Вращение вокруг неподвижной оси

Формулы для скорости и ускорения точки P твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси OZ, получаются из общих соотношений (3) и (5) путем применения к этим соотношениям частных условий:

$$\bar v_O = 0,\ \bar w_O = 0,\ \bar\omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_Z \end{bmatrix}^T.$$

В результате из (3) следует

$$\bar v = \bar\omega \times \bar r = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ 0 & 0 & \omega_Z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = -\bar i Y\omega_Z + \bar j X\omega_Z\,,\ v = \left|\bar v\right| = \omega_Z\sqrt{X^2 + Y^2} = R\omega_Z\,, \qquad (6)$$

а из (5)

$$\overline{w} = \overline{w}_{вр} + \overline{w}_{ос}\,,$$

$$\overline{w}_{вр} = \bar\varepsilon \times \bar r = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ 0 & 0 & \varepsilon_Z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = -\bar i Y\varepsilon_Z + \bar j X\varepsilon_Z\,,\ w_{вр} = \left|\overline{w}_{вр}\right| = \varepsilon_Z\sqrt{X^2 + Y^2} = R\varepsilon_Z\,;$$

$$\overline{w}_{ос} = \bar\omega \times \bar v = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ 0 & 0 & \omega_Z \\ -Y\omega_Z & X\omega_Z & 0 \end{vmatrix} = -\bar i X{\omega_Z}^2 - \bar j Y{\omega_Z}^2\,,\ w_{ос} = \left|\overline{w}_{ос}\right| = {\omega_Z}^2\sqrt{X^2 + Y^2} = R\omega_Z^2. \quad (7)$$

Таким образом, любая точка твердого тела, не лежащая на оси его вращения, движется по окружности радиуса R в плоскости, перпендикулярной оси вращения (рис.15). Формулы (6), (7) соответствуют случаю движения точки по окружности[6].

Плоское движение

Движение твердого тела называется *плоским*, если все точки тела движутся в плоскостях, параллельных неподвижной плоскости.

[6] В данном случае осестремительное ускорение равно нормальному, а вращательное ускорение– тангенциальному.

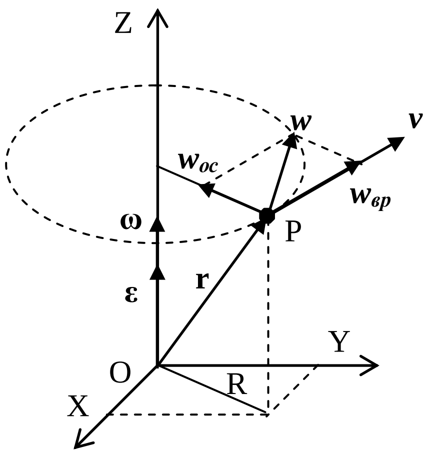


Рис. 15

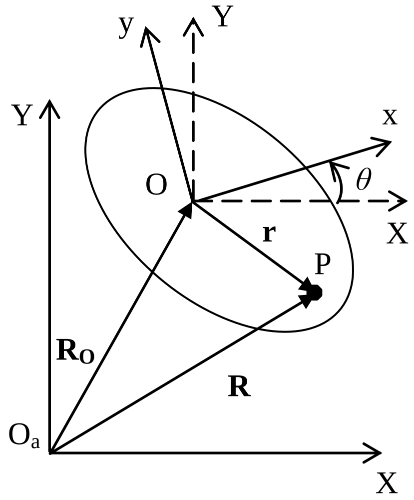


Рис. 16

Плоское движение твердого тела эквивалентно движению соответствующей плоской фигуры в собственной плоскости (рис. 16). Фигура имеет свободу по трем независимым перемещениям: вдоль оси O_aX, вдоль оси O_aY и вращение в плоскости O_aXY. Соответственно, любое положение фигуры может быть задано тремя координатами: X_O, Y_O, θ.

Формулы для скорости и ускорения точки P твердого тела, совершающего плоское движение, получаются из общих соотношений (3) и (5) путем применения к этим соотношениям частных условий:

$$v_Z = 0,\ w_Z = 0,\ \overline{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_Z \end{bmatrix}^T.$$

В результате из (3) следует[7]

$$\overline{v} = \overline{v}_O + \overline{v}_{PO}, \tag{8}$$

$$\overline{v}_O = \begin{bmatrix} v_X & v_Y & 0 \end{bmatrix}^T,\ \overline{v}_{PO} = \begin{bmatrix} -Y\omega_Z & X\omega_Z & 0 \end{bmatrix}^T,\ v_{PO} = \left|\overline{v}_{PO}\right| = r\omega_Z,$$

а из (5)

$$\overline{w} = \overline{w}_O + \overline{w}_{PO}^{oc} + \overline{w}_{PO}^{вр}, \tag{9}$$

$$\overline{w}_O = \begin{bmatrix} w_X & w_Y & 0 \end{bmatrix}^T,\ \overline{w}_{PO}^{oc} = \begin{bmatrix} -X\omega_Z^2 & -Y\omega_Z^2 & 0 \end{bmatrix}^T,\ \overline{w}_{PO}^{вр} = \begin{bmatrix} -Y\varepsilon_Z & X\varepsilon_Z & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$w_{PO}^{oc} = r\omega_Z^2,\ w_{PO}^{вр} = r\varepsilon_Z.$$

Таким образом, в случае плоского движения, векторы скорости и ускорения точки твердого тела всегда лежат в плоскости движения, а векторы угловой скорости и углового ускорения всегда перпендикулярны этой

[7] Обозначение $\overline{v}_{PO}$ читается так: «скорость точки P относительно точки O».

плоскости. Этот факт позволяет при решении практических задач оперировать линейными скоростями и ускорениями как *векторами в плоскости*, а угловыми скоростями и ускорениями – как *скалярными* величинами.

Задача

Стержень *OA* шарнирного четырехзвенника (рис. 17) вращается с постоянной угловой скоростью ω_0. Определить угловую скорость, угловое ускорение стержня AB, а также ускорение шарнира B в положении, указанном на рисунке, если *AB = 2OA = 2a*.

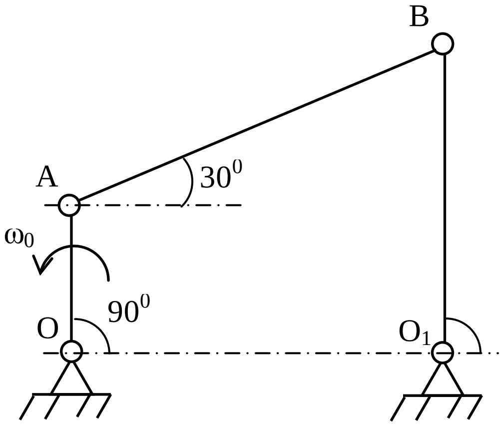


Рис. 17

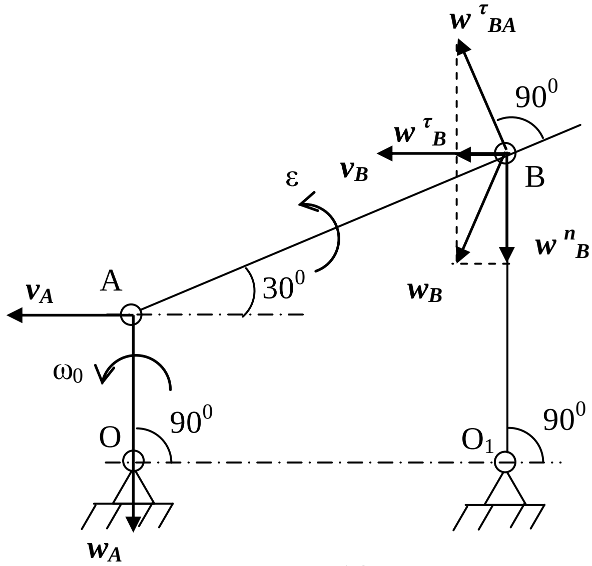


Рис. 18

Решение

Стержень *AB* изображенного на рисунке четырехзвенного механизма совершает плоское движение, а стержни *OA* и O_1B вращаются вокруг неподвижных центров *O* и O_1. Найдем скорость шарнира *A*:

$$v_A = a \cdot \omega_0 .$$

Вектор $\bar{v}_A$ перпендикулярен *OA* и направлен в сторону вращения стержня *OA* (рис. 18). Для скорости шарнира *B* справедливо равенство (8):

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA} ,$$

причем направление $\bar{v}_B$, согласно положению механизма, будет то же, что и у $\bar{v}_A$. Из этого следует, что $\bar{v}_B = \bar{v}_A$, $\bar{v}_{BA} = 0$, $\omega = v_{BA}/l_{BA} = 0$, т.е. стержень *AB* совершает мгновенно-поступательное движение.

Найдем ускорение шарнира *А*. Так как этот шарнир движется вокруг неподвижной точки *О*, то для его ускорения справедливо равенство (7):

$$\overline{w}_A = \overline{w}_A^n + \overline{w}_A^\tau,$$

где $w_A^n = a\omega_0^2$ - нормальное ускорение, направленное от точки *А* к центру вращения *О*; $\overline{w}_A^\tau = a\varepsilon_0 = 0$, т.к. $\varepsilon_0 = d\omega_0/dt = 0, \omega_0 = const$. В данном случае $\overline{w}_A = \overline{w}_A^n$. Для ускорения шарнира *В* справедливо равенство (9):

$$\overline{w}_B^n + \overline{w}_B^\tau = \overline{w}_A + \overline{w}_{BA}^n + \overline{w}_{BA}^\tau, \tag{10}$$

где $w_B^n = v_B^2/l_{O_1B} = a^2\omega_0^2/2a = a\omega_0^2/2$ - нормальное ускорение шарнира *В* в его движении вокруг неподвижной точки O_1; $\overline{w}_{BA}^n = v_{BA}^2/l_{BA} = 0$ - нормальное ускорение шарнира *В* относительно точки *А*.

Неизвестные по величине векторы $\overline{w}_B^\tau, \overline{w}_{BA}^\tau$ определим, построив *план ускорений*. Для этого из произвольной точки p_w, называемой *полюсом* плана ускорений, отложим отрезок $p_w a$,, отображающий ускорение $\overline{w}_A$ (рис. 19). Тогда, проводя через точку *а* прямую, перпендикулярную АВ, получим направление тангенциального ускорения $\overline{w}_{BA}^\tau$. Составляющую результирующего ускорения $\overline{w}_B^n$ отложим из полюса p_w в виде отрезка $p_w b^*$, длина которого вдвое меньше $p_w a$. Замкнем план ускорений прямой, перпендикулярной стержню O_1B и задающей направление $\overline{w}_B^\tau$. На пересечении двух перпендикуляров получим точку *b*. Отрезок $p_w b$ будет отображать ускорение $\overline{w}_B$ шарнира *В*, а отрезок *ab* – ускорение $\overline{w}_{BA}^\tau$. План ускорений графически отображает векторное равенство (10), из плана легко определяются все неизвестные ускорения:

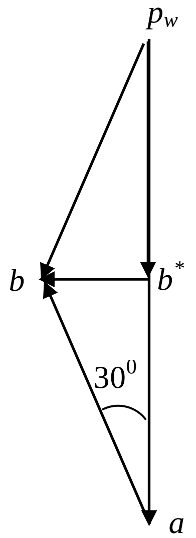


Рис. 19

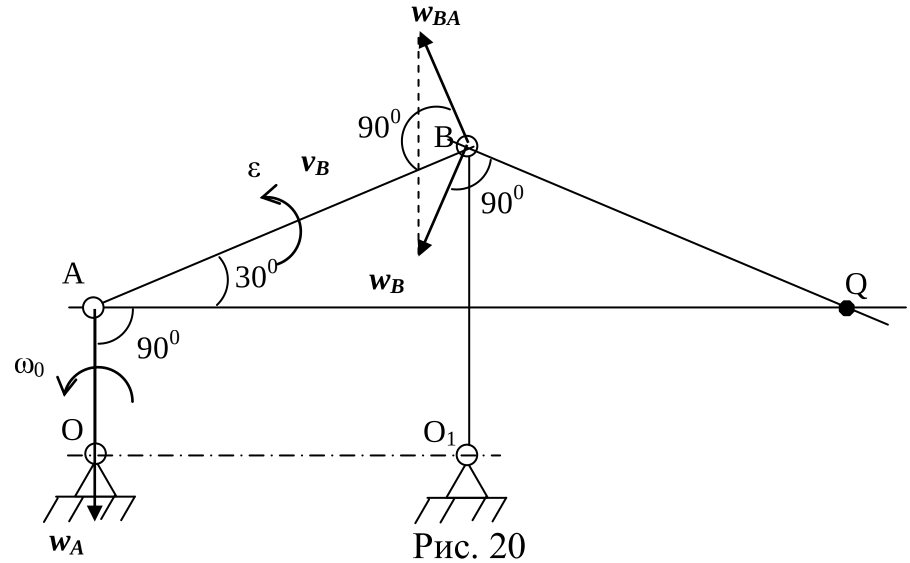


Рис. 20

$$\frac{w_B^n}{w_B} = \frac{p_w b^*}{p_w b} \Rightarrow w_B = \frac{w_B^n}{\cos 30^0} = \frac{a\omega_0^2}{2}\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}a\omega_0^2$$ - ускорение шарнира *B*;

$$ab = p_w b \Rightarrow w_{BA}^\tau = w_B,\ \varepsilon = \frac{w_{BA}^\tau}{l_{BA}} = \frac{\sqrt{3}a\omega_0^2}{2a\cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{6}\omega_0^2$$ - угловое ускорение стержня *AB*.

Направления всех вычисленных скоростей и ускорений точек механизма изображены на рис. 18.

В задачах на случай плоского движения твердого тела иногда удается получить более короткое решение за счет использования понятий *мгновенный центр скоростей* и *мгновенный центр ускорений*. Мгновенным центром скоростей (МЦС) называют такую точку плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени движения равна нулю. Скорости остальных точек фигуры при этом такие, какие они были бы при вращательном движении фигуры вокруг МЦС. Мгновенный центр ускорений (МЦУ), соответственно, это такая точка плоской фигуры, ускорение которой в данный момент времени движения равно нулю. Ускорения остальных точек фигуры такие, какие они были бы при ее вращательном движении относительно МЦУ.

Решим предыдущую задачу, используя понятия МЦС и МЦУ. Из рис. 17 видно, что стержень *OA* параллелен стержню *O_1B*. Следовательно, абсолютные скорости точек A и B стержня AB параллельны. Учитывая, что в силу неизменности расстояния между точками A и B проекции скоростей $\overline{v}_A$ и $\overline{v}_B$ на направление AB должны быть одинаковыми (точка B не может догнать точку A, но также не может отстать от точки A), заключаем, что $\overline{v}_B = \overline{v}_A$. Таким образом, стержень AB совершает мгновенно-поступательное движение, положение его МЦС бесконечно удалено и $\omega = 0$.

Определим направление ускорения $\overline{w}_{BA}$ точки В в ее движении относительно точки А. Так как угловая скорость стержня AB $\omega = 0$, то $\overline{w}_{BA} = \overline{w}_{BA}^{\tau}$ и, следовательно, угол между $\overline{w}_{BA}$ и AB равен 90^0 (рис. 20). Согласно определению понятия МЦУ угол между абсолютным ускорением $\overline{w}_A = \overline{w}_A^n$ и направлением на МЦУ (точка Q) также равен 90^0. Для определения положения точки Q воспользуемся соотношением, справедливым при $\omega = 0$:

$$\frac{w_A}{AQ} = \frac{w_B}{BQ} = \frac{w_{BA}}{AB} = \varepsilon . \tag{11}$$

Вычислим ускорение точки A: $\overline{w}_A = \overline{w}_A^n = a\omega_0^2$. В силу соотношения $O_1B = AB = 2a$ будем иметь $\overline{w}_B^n = \frac{1}{2} w_A = \frac{1}{2} a\omega_0^2$. Так как $\overline{w}_{BA}^n = 0$, а $\overline{w}_A$ направлено в ту же сторону, что и $\overline{w}_B^n$, на основании равенства (10) заключаем: $w_{BA} = w_B$ (рис. 19). Следовательно, из (11) получим $AB = BQ = 2a$, и точка Q будет симметрична точке A относительно направления O_1B (рис. 20). Тогда $AQ = 4a\cos 30^0 = 2a\sqrt{3}$, $\varepsilon = \frac{w_A}{AQ} = \frac{a\omega_0^2}{2a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}\omega_0^2$ и $w_B = \varepsilon \cdot BQ = \frac{\sqrt{3}}{3} a\omega_0^2$. Угол между $\overline{w}_B$ и направлением BQ, согласно определению понятия МЦУ, составит 90^0.

Сложное движение точки

Движение точки называется *сложным*, если оно происходит относительно двух систем координат, одна из которых – подвижная, а другая – неподвижная. Движение точки относительно подвижной системы координат называется *относительным*, а движение подвижной системы координат относительно неподвижной – *переносным*. Часто подвижную систему координат связывают с некоторым твердым телом, совершающим движение относительно неподвижной системы координат. При этом полагается, что относительное и переносное движения известны. Задача состоит в том, чтобы определить сложное движение точки в неподвижной (абсолютной) системе координат.

Пусть точка *P* перемещается по поверхности твердого тела, движущегося произвольным образом относительно абсолютной системы координат O_aXYZ (рис. 21).

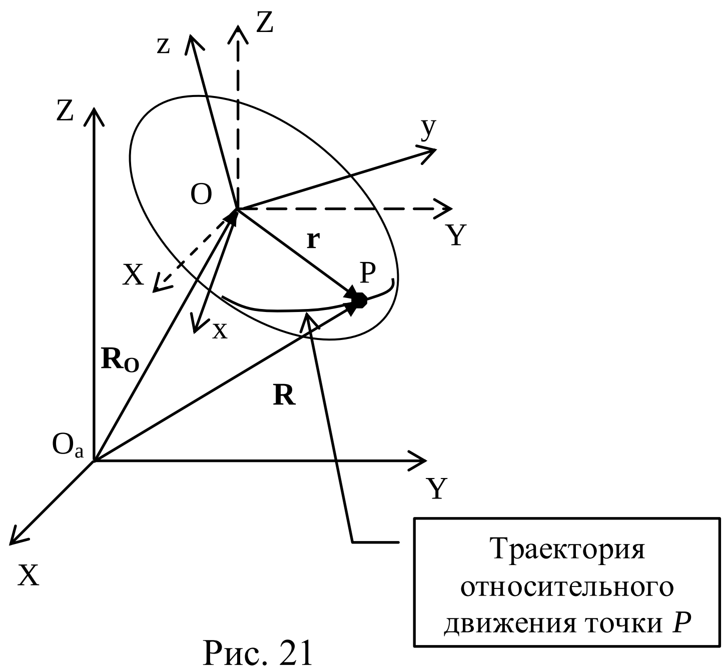


Рис. 21

Система координат *OXYZ* движется поступательно вместе с центром *O* твердого тела: $\overline{R}_O = \overline{R}_O(t)$, а система координат *Oxyz* жестко связана с твердым телом и вращается вокруг центра *O*: $A = A(t)$ - матрица поворота *Oxyz* вокруг *OXYZ*. Радиус-вектор точки *P* в системе координат *Oxyz* обозначим $\overline{\rho} = \overline{\rho}(t)$ и будем полагать известным. Вычислим абсолютную скорость точки *P*, воспользовавшись соотношением (2):

$$\bar{v} = \dot{\bar{R}} = \dot{\bar{R}}_O + \dot{\bar{r}} = \dot{\bar{R}}_O + \dot{A}\cdot\bar{\rho} + A\cdot\dot{\bar{\rho}} = \bar{v}_O + \bar{\omega}\times\bar{r} + A\cdot\dot{\bar{\rho}}\,. \tag{12}$$

Обозначив в (12) $\bar{v}_O + \bar{\omega}\times\bar{r} = \bar{v}_e$ и $A\cdot\dot{\bar{\rho}} = \bar{v}_r$ получим:

$$\bar{v} = \bar{v}_e + \bar{v}_r\,, \tag{13}$$

где $\bar{v}_e$ - скорость переносного движения точки *P*, $\bar{v}_r$ - скорость относительного движения точки *P*. Соотношение (13) называется <u>*теоремой о сложении скоростей*</u>. Абсолютное ускорение точки *P* определим, продифференцировав по времени *t* соотношение (12):

$$\bar{w} = \dot{\bar{v}} = \dot{\bar{v}}_O + \dot{\bar{\omega}}\times\bar{r} + \bar{\omega}\times\dot{\bar{r}} + \dot{A}\cdot\dot{\bar{\rho}} + A\cdot\ddot{\bar{\rho}}\,. \tag{14}$$

Обозначая в (14) $\dot{\bar{v}}_O = \bar{w}_O$ - абсолютное ускорение центра *O*, $\dot{\bar{\omega}} = \bar{\varepsilon}$ - угловое ускорение твердого тела и учитывая, что $\dot{\bar{r}} = \bar{\omega}\times\bar{r} + \bar{v}_r$, будем иметь:

$$\bar{w} = \bar{w}_O + \bar{\varepsilon}\times\bar{r} + \bar{\omega}\times\bar{\omega}\times\bar{r} + \bar{\omega}\times\bar{v}_r + \dot{A}\cdot\dot{\bar{\rho}} + A\cdot\ddot{\bar{\rho}}\,. \tag{15}$$

Следует обратить внимание в (15) на слагаемое $\bar{\omega}\times\bar{v}_r$, которое образовалось в результате дифференцирования по времени *t* переносной скорости $\bar{v}_O + \bar{\omega}\times\bar{r} = \bar{v}_e$. Покажем, что такое же слагаемое будет иметь место после дифференцирования относительной скорости $A\cdot\dot{\bar{\rho}} = \bar{v}_r$. Для этого обозначим в (15) $A\cdot\ddot{\bar{\rho}} = \bar{w}_r$ - ускорение относительного движения точки *P* и умножим слагаемое $\dot{A}\cdot\dot{\bar{\rho}}$ на единичную матрицу $A^{-1}A = E$. В результате получим:

$$\bar{w} = \bar{w}_O + \bar{\varepsilon}\times\bar{r} + \bar{\omega}\times\bar{\omega}\times\bar{r} + \bar{\omega}\times\bar{v}_r + \dot{A}A^{-1}A\cdot\dot{\bar{\rho}} + \bar{w}_r\,.$$

Замечая, что $\dot{A}A^{-1}A\cdot\dot{\bar{\rho}} = \bar{\omega}\times\bar{v}_r$, окончательно будем иметь:

$$\bar{w} = \bar{w}_O + \bar{\varepsilon}\times\bar{r} + \bar{\omega}\times\bar{\omega}\times\bar{r} + 2\bar{\omega}\times\bar{v}_r + \bar{w}_r\,, \tag{16}$$

где $\bar{w}_O + \bar{\varepsilon}\times\bar{r} + \bar{\omega}\times\bar{\omega}\times\bar{r} = \bar{w}_e$ - переносное ускорение, $2\bar{\omega}\times\bar{v}_r = \bar{w}_k$ - <u>*ускорение Кориолиса*</u>. Соотношение (16) называется <u>*теоремой о сложении ускорений*</u>. Изложенное дает основание сделать важные с точки зрения механики выводы:

- Если в переносном движении присутствует вращательная составляющая ($\overline{\omega} \neq 0$), то в случае сложного движения точки имеет место ускорение Кориолиса.
- Множитель «2» в формуле для ускорения Кориолиса отражает тот механический факт, что в образование ускорения Кориолиса переносное и относительное движение вносят <u>*одинаковый*</u> вклад $\overline{\omega} \times \overline{v}_r$.
- Модуль ускорения Кориолиса вычисляется по формуле $w_k = 2\omega \cdot v_r \sin\varphi$, φ – угол между векторами $\overline{\omega}$ и $\overline{v}_r$; направление вектора $\overline{w}_k$ - перпендикуляр к плоскости векторов $\overline{\omega}$ и $\overline{v}_r$ согласно правилу правой тройки (рис 22).
- В динамике сложного движения материальной точки необходимо всегда учитывать возможность возникновения <u>*сил инерции*</u>, обусловленных ускорением Кориолиса.

Если переносное движение твердого тела является плоским и относительное движение точки происходит в плоскости, параллельной плоскости движения твердого тела, то угловая скорость $\overline{\omega}$ всегда перпендикулярна относительной скорости $\overline{v}_r$ и $w_k = 2\omega \cdot v_r$. Для данного случая существует простое правило определения направления ускорения Кориолиса:

- Если вектор $\overline{v}_r$ повернуть на 90^0 в плоскости движения по направлению вращения твердого тела, то этот вектор укажет направление $\overline{w}_k$ (рис. 23).

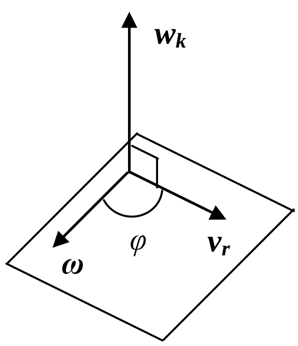


Рис. 22

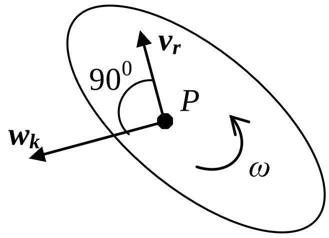


Рис. 23

Задача

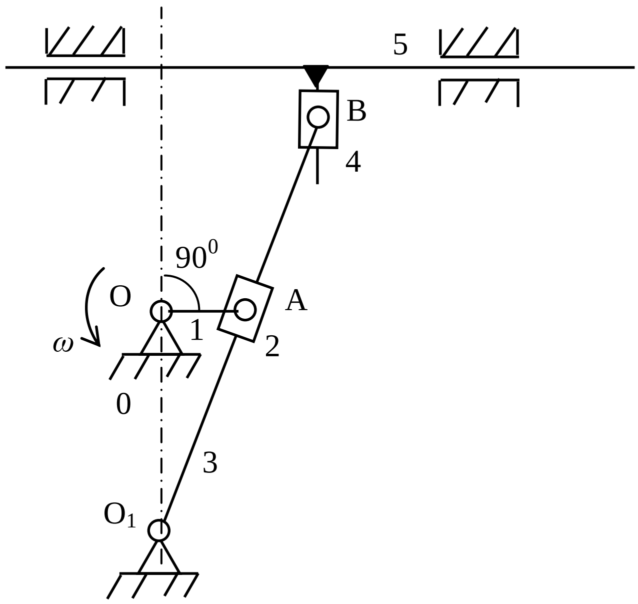


Рис. 24

Вычислить скорость и ускорение суппорта 5 строгального станка в положении, указанном на рис. 24.

Исходные данные:

$OA = 0.1$ *м*, $O_1O = 0.3$ *м*,
$O_1B = 0.6$ *м*, $\omega = 4$ *рад/с* $= const.$

<u>*Решение*</u>

Дадим описание работы механизма станка по заданной схеме (рис. 24). Механизм состоит из шести звеньев: стойки 0, кривошипа 1, кулисного камня 2, кулисы 3, ползушки 4 и суппорта 5. Стойка 0 является в рассматриваемой задаче неподвижным звеном. Кривошип 1 совершает вращательное движение вокруг оси, проходящей через центр *O*, и является входным звеном.[8] Согласно условию задачи, кривошип 1 вращается равномерно с угловой скоростью ω = 4 рад/с. Движение от кривошипа передается кулисе 3 через кулисный камень 2. Кулиса 3 совершает возвратно-качательное движение вокруг оси, проходящей через центр O_1. Кулисный камень 2 совершает <u>*сложное движение*</u>: он движется возвратно-поступательно вдоль кулисы 3 и одновременно вращается вокруг центра O_1 вместе с кулисой. Кулиса 3, через ползушку 4, приводит в движение суппорт 5, который является выходным звеном механизма.[9] Суппорт 5

[8] Входными в механике называются звенья механизма, через которые к нему поступает механическая энергия от двигателей. Законы движения входных звеньев, как правило, известны.
[9] Выходными звеньями называются звенья механизма, совершающие требуемые технологические движения. Вообще, любой механизм можно рассматривать как преобразователь механической энергии двигателей в механическую энергию требуемых технологических движений выходных звеньев.

совершает возвратно-поступательное движение в горизонтальном направлении. Ползушка 4 совершает <u>*сложное движение*</u>: она движется возвратно-поступательно в вертикальном направлении относительно суппорта и вместе с суппортом совершает возвратно-поступательное движение в горизонтальном направлении. Все подвижные звенья данного механизма совершают плоское движение.

Обозначим A_1 точку A, принадлежащую кривошипу 1, а точку A, принадлежащую кулисе 3, обозначим A_3. Тогда, по теореме о сложении скоростей (13), можно записать:

$$\bar{v}_{A1} = \bar{v}_{A3} + \bar{v}_{A1A3}, \tag{17}$$

где $\bar{v}_{A1}$ - абсолютная скорость точки A, принадлежащей кривошипу 1, $\bar{v}_{A3}$ - скорость точки A, принадлежащей кулисе 3 (переносная скорость), $\bar{v}_{A1A3}$ - скорость точки A кривошипа 1 относительно точки A кулисы 3 (относительная скорость). Найдем $\bar{v}_{A1}$: $v_{A1} = (OA) \cdot \omega = 0.1 \cdot 4 = 0.4 м/с$, направление вектора $\bar{v}_{A1}$ - перпендикуляр к OA в сторону вращения кривошипа 1. Скорости $\bar{v}_{A3}$ и $\bar{v}_{A1A3}$ известны только по направлению: $\bar{v}_{A3}$ - перпендикуляр к O_1B, $\bar{v}_{A1A3}$ - вдоль O_1B. Поэтому, для вычисления величин этих векторов удобно воспользоваться <u>*методом векторных планов*</u>. Из произвольной точки p_v, называемой <u>*полюсом*</u> плана скоростей, отложим отрезок $p_v a_1$ произвольной длины, отображающий абсолютную скорость $\bar{v}_{A1}$ (рис. 25). Согласно векторному уравнению (17) через точку a_1 проведем прямую, параллельную O_1B (направление скорости $\bar{v}_{A1A3}$) и через точку p_v – прямую, перпендикулярную O_1B (направление $\bar{v}_{A3}$). На пересечении этих прямых получим точку a_3. Так как треугольник векторов прямоугольный и подобный треугольнику OO_1A, то v_{A3} и v_{A1A3} вычислим по теореме Пифагора:

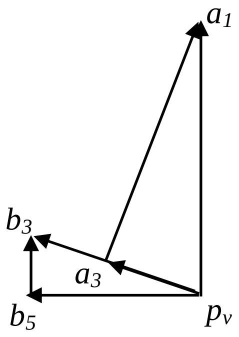


Рис. 25

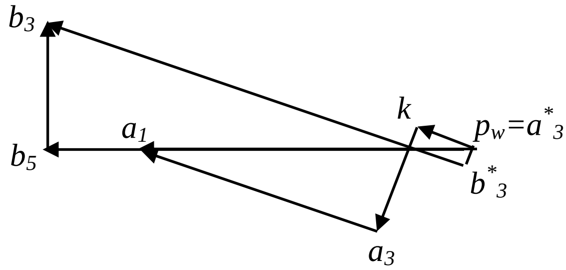


Рис. 26

$$\frac{v_{A1A3}}{v_{A1}} = \frac{a_1 a_3}{p_v a_1} = \frac{O_1 O}{O_1 A} \Rightarrow v_{A1A3} = \frac{O_1 O}{O_1 A} \cdot v_{A1} = \frac{0.3}{\sqrt{0.1^2 + 0.3^2}} \cdot 0.4 \approx 0.38 м/с;$$

$v_{A3} = \sqrt{v_{A1}^2 - v_{A1A3}^2} = \sqrt{0.4^2 - 0.38^2} \approx 0.12 м/с$. Угловая скорость кулисы 3: $\omega_3 = \frac{v_{A3}}{O_1 A} = \frac{0.12}{\sqrt{0.1^2 + 0.3^2}} \approx 0.38 рад/с$.

Рассмотрим теперь движение суппорта 5 и кулисы 3. Согласно (13) имеем:

$$\bar{v}_{B3} = \bar{v}_{B5} + \bar{v}_{B3B5}, \tag{18}$$

где $\bar{v}_{B3}$ - абсолютная скорость точки *B*, принадлежащей кулисе 3, $\bar{v}_{B5}$ - абсолютная скорость точки *B*, принадлежащей суппорту 5 (переносная скорость), $\bar{v}_{B3B5}$ - скорость точки *B*, принадлежащей кулисе 3 относительно точки *B*, принадлежащей суппорту 5. Определим $\bar{v}_{B3}$: $v_{B3} = (O_1 B) \cdot \omega_3 = 0.6 \cdot 0.38 = 0.23 м/с$, направление $\bar{v}_{B3}$ - перпендикуляр к O_1B. Скорости $\bar{v}_{B5}$ и $\bar{v}_{B3B5}$ известны только по направлению, поэтому их величины определим, построив векторный план. Отложим от точки p_v в направлении $p_v a_3$ отрезок $p_v b_3 = (p_v a_3)\frac{v_{B3}}{v_{A3}} = 1.9 \cdot (p_v a_3)$, отображающий на плане скорость $\bar{v}_{B3}$ (рис. 25). Через точку b_3, согласно (18), проведем прямую по направлению скорости $\bar{v}_{B3B5}$ и замкнем треугольник прямой, проведенной в направлении скорости $\bar{v}_{B5}$. На пересечении этих прямых отметим точку b_5. Так как полученный треугольник – прямоугольный и подобный верхнему треугольнику, то то v_{B5} и v_{B3B5} вычислим по теореме Пифагора:

$$\frac{v_{B5}}{v_{B3}}=\frac{p_v b_5}{p_v b_3}=\frac{a_1 a_3}{p_v a_1}=\frac{O_1 O}{O_1 A}\Rightarrow v_{B5}=\frac{O_1 O}{O_1 A}\cdot v_{B3}=\frac{0.3}{\sqrt{0.1^2+0.3^2}}\cdot 0.23\approx 0.22\,м/с\,,$$

$$v_{B3B5}=\sqrt{v_{B3}^2-v_{B5}^2}=\sqrt{0.23^2-0.22^2}\approx 0.07\,м/с\,.$$

Таким образом, скорость суппорта 5 в положении, указанном на рис. 24, равна 0.22 м/с и направлена влево. Полученный результат соответствует исходным данным: действительно, согласно положению механизма на схеме, крайнее правое положение суппортом уже пройдено и он движется в обратном направлении.

Определим ускорения звеньев механизма. По теореме о сложении ускорений (16) можно записать:

$$\overline{w}_{A1}=\overline{w}_{A3}^{n}+\overline{w}_{A3}^{\tau}+\overline{w}_{A1A3}+\overline{w}_{k}\,, \qquad (19)$$

где $w_{A1}=w_{A1}^{n}=(OA)\cdot\omega^2=0.1\cdot 4^2=1.6\,м/с^2$ ($w_{A1}^{\tau}=0$, т.к. $\omega=const$); $w_{A3}^{n}=(O_1A)\cdot\omega_3^2=0.32\cdot 0.38^2\approx 0.05\,м/с^2$, $w_k=2\omega_3 v_{A1A3}=2\cdot 0.38\cdot 0.38\approx 0.29\,м/с^2$. Таким образом, в уравнении (19) присутствуют два неизвестных по величине ускорения; для их вычисления воспользуемся методом векторных планов. Отложим от полюса плана ускорений p_w отрезок $p_w a_1$, изображающий ускорение точки A кривошипа 1 (рис. 26). Для удобства вычислений длину этого отрезка примем равной 40 мм. Тогда масштаб плана ускорений $\mu_w=\frac{w_{A1}}{p_w a_1}=\frac{1.6}{40}=0.04\frac{м\cdot с^{-2}}{мм}$. Переведем в отрезки известные нам по величине ускорения: $p_w a_3^*=\frac{w_{A3}^n}{\mu_w}=\frac{0.05}{0.04}=1.25\,мм$, $a_3^* k=\frac{w_k}{\mu_w}=\frac{0.29}{0.04}=7.25\,мм$. Так как отрезок $p_w a^*_3$ мал, пренебрежем его длиной, и будем считать, что точки p_w и a^*_3 совпадают. Направление отрезка $a_3^* k$, изображающего ускорение Кориолиса, определим, повернув отрезок $a_3 a_1$, изображающий относительную скорость $\overline{v}_{A1A3}$, (рис. 25) на 90^0 в направлении вращения кулисы 3. Замыкая векторный многоугольник направлениями ускорений $\overline{w}_{A3}^{\tau}$ и $\overline{w}_{A1A3}$, в соответствии с уравнением (19) получим точку a_3. Тогда отрезку ka_3 будет соответствовать относительное ускорение $\overline{w}_{A1A3}$, а отрезку a_3a_1 - тангенциальное ускорение $\overline{w}_{A3}^{\tau}$ точки *А*, принадлежащей кулисе 3. Рассмотрим теперь движение суппорта 5 и кулисы 3. Согласно (16) имеем:

$$\overline{w}_{B3}^{n} + \overline{w}_{B3}^{\tau} = \overline{w}_{B5} + \overline{w}_{B3B5}, \qquad (20)$$

где $\overline{w}_{B5}$ - ускорение суппорта 5, $\overline{w}_{B3B5}$ - ускорение точки *В* кулисы 3 относительно точки *В* суппорта 5. В данном случае $\overline{w}_{к} = 0$, так как переносное движение суппорта – поступательное. Нормальное ускорение $\overline{w}_{B3}^{n} = (O_1B) \cdot \omega_3^2 = 0.6 \cdot 0.38^2 = 0.09 м/с^2$, отображающий это ускорение отрезок $p_w b_3^* = \dfrac{w_{B3}^n}{\mu_w} = \dfrac{0.09}{0.04} = 2.25 мм$. Отрезок $b^*_3b_3$, отображающий тангенциальное ускорение $\overline{w}_{B3}^{\tau}$, найдем из соотношения: $\dfrac{a_3a_1}{b_3^*b_3} = \dfrac{w_{A3}^{\tau}}{w_{B3}^{\tau}} = \dfrac{O_1A}{O_1B} \Rightarrow b_3^*b_3 = (a_3a_1)\dfrac{O_1B}{O_1A} = (a_3a_1) \cdot 1.9$. Замыкая векторный многоугольник направлениями ускорений $\overline{w}_{B5}$ и $\overline{w}_{B3B5}$ в соответствии с уравнением (20) получим точку b_5 (рис. 26). Отрезок p_wb_5 отображает на плане ускорение суппорта 5. Длина этого отрезка – 55 мм, следовательно $w_5 = (p_wb_5) \cdot \mu_w = 55 \cdot 0.04 = 2.20 м/с^2$.

Таким образом, ускорение суппорта в положении механизма, изображенном на рис. 24, равно 2.20 м/с^2 и направлено в ту же сторону, что и вектор скорости суппорта. Это означает, что в данный момент времени суппорт ускоряется. Планы скоростей и ускорений, изображенные на рис. 25 и рис. 26 соответственно, дают полную информацию о скоростях и ускорениях звеньев механизма в заданном на рис. 24 положении. Для того чтобы получить векторные планы в другом положении механизма, необходимо заново выполнить все приведенные вычисления.

Вопросы для проверки усвоения материала

1) Дайте определение понятию «абсолютно твердое тело».
2) Чему равно число степеней свободы твердого тела в трехмерном пространстве?
3) В чем разница между понятиями перемещения и движения твердого тела?
4) Назовите простейшие перемещения твердого тела.
5) Что такое матрица поворота твердого тела? Перечислите основные свойства матрицы поворота.
6) Запишите матрицы элементарных поворотов твердого тела.
7) Как задается поступательное перемещение твердого тела?
8) Как задается произвольное перемещение твердого тела?
9) Что такое угловая скорость твердого тела?
10) Как вычислить угловую скорость твердого тела, зная матрицу поворота $A(t)$?
11) Как вычислить абсолютную скорость произвольной точки твердого тела, зная матрицу поворота $A(t)$ и вектор переноса $R_O(t)$?
12) Что такое угловое ускорение твердого тела?
13) Как вычислить абсолютное ускорение произвольной точки твердого тела, зная матрицу поворота $A(t)$ и вектор переноса $R_O(t)$?
14) По каким траекториям движутся точки твердого тела относительно неподвижной оси вращения?
15) Что такое плоское движение твердого тела?
16) Какие независимые перемещения твердого тела имеют место в случае плоского движения?
17) Почему в случае плоского движения твердого тела можно оперировать угловыми скоростью и ускорением как скалярными величинами?
18) Что такое сложное движение точки? Сформулируйте теоремы о сложении скоростей и о сложении ускорений.

3. ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Классификация связей

Дадим определение понятию механическая система. *Механической системой* в теоретической механике называется совокупность некоторого конечного числа материальных точек. Такими абстрактными системами математически моделируются реальные физические системы, труднодоступные для исследования путем натурного эксперимента (принципиально новые проектируемые изделия и их элементы, природные системы, изменения в которых наблюдаются в течение длительных или, наоборот, очень коротких периодов времени и т.п.). В каждой конкретной задаче существуют ограничения, накладываемые на положения и скорости точек механической системы, которые выполняются при любых действующих на систему силах. Эти ограничения называются *связями*. Если подобных ограничений нет, то механическая система называется *свободной*, при наличии одной или нескольких связей система называется *несвободной*.

Рассмотрим движение системы материальных точек $P_\nu, \nu = 1,2,\ldots,N$, относительно некоторой прямоугольной декартовой системы координат, полагаемой неподвижной. Состояние механической системы задается радиус-векторами $\bar{r}_\nu$ и скоростями $\bar{v}_\nu$ ее точек. В общем случае связь задается функцией

$$f(\bar{r}_1,\bar{r}_2,\ldots,\bar{r}_N,\bar{v}_1,\bar{v}_2,\ldots,\bar{v}_N,t) \ge 0, \tag{1}$$

которая полагается дважды непрерывно дифференцируемой. В дальнейшем, будем использовать сокращенную запись функции (1) - $f(\bar{r}_\nu,\bar{v}_\nu,t) \ge 0$. Если в (1) реализуется знак равенства, то связь называется *удерживающей* или *двухсторонней*. Если реализуется знак $\ge$, то связь называется *неудерживающей* или *односторонней*. Системы с неудерживающими связями в дальнейшем не рассматриваются. Если уравнение связи можно записать в виде $f(\bar{r}_\nu,t) = 0$, то связь называется *геометрической* или *голономной*. Если в уравнение связи входят проекции скоростей $\bar{v}_\nu$, то связь называется

<u>дифференциальной</u> или *<u>кинематической</u>*. Дифференциальную связь $f(\bar{r}_\nu, \bar{v}_\nu, t) = 0$ называют *<u>интегрируемой</u>*, если ее можно представить в виде геометрической связи. Неинтегрируемая дифференциальная связь называется *<u>неголономной</u>*. Соответственно, механическая система, в которой есть хотя бы одна такая связь, называется неголономной. Связь называется *<u>стационарной</u>* или *<u>склерономной</u>*, если она не зависит явно от времени *t*. Если все связи в механической системе стационарные, то система называется склерономной. В противном случае система будет называться *<u>реономной</u>*.

<u>Задача</u>

Конек движется по льду в горизонтальной плоскости *Oxy* (рис. 27). Точка *C* конька во все время движения имеет скорость, направленную вдоль его полоза. Показать, что данная механическая система неголономная.

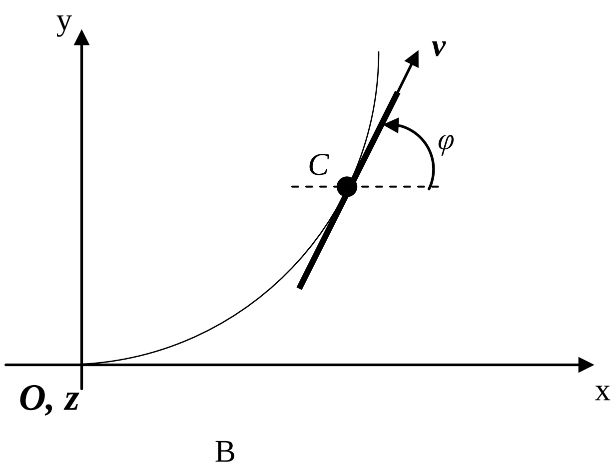


Рис. 27

<u>Решение</u>

Запишем уравнения связей, наложенных на точку *C* конька. Так как конек все время находится в плоскости *Oxy*, то первая связь будет задаваться уравнением $z = 0$, где *z* – координата точки *C* по вертикальной оси. По условию задачи, скорость точки C $\bar{v} = [\dot{x} \ \ \dot{y}]^T$ направлена все время вдоль конька. Это ограничение опишется уравнением $\dot{y} = \dot{x} \cdot tg\varphi$, где φ – угол поворота конька, отсчитываемый от направления оси *Ox*. Других связей в данной механической системе нет. Очевидно, что связь $z = 0$ геометрическая, т.к. в ее уравнение входит координата *z* точки *C*, но не входят проекции скорости. Связь $\dot{y} = \dot{x} \cdot tg\varphi$ является дифференциальной, т.к. в ее уравнение входят проекции скорости точки *C*.

Предположим, что дифференциальная связь $\dot{y} = \dot{x} \cdot tg\varphi$ интегрируемая. Тогда ее можно записать как функцию координат *x*, *y*, φ и времени *t*: $f(x, y, \varphi, t) = 0$. Пусть *x*, *y* и φ отвечают действительному движению конька. Вычислим полную производную функции *f* по времени:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\dot{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial t} \equiv 0.$$

С учетом уравнения связи $\dot{y} = \dot{x} \cdot tg\varphi$ выражение для $\dot{f}$ примет вид

$$\dot{f} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} tg\varphi\right)\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\dot{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial t} \equiv 0,$$

откуда, ввиду независимости величин $\dot{x}, \dot{\varphi}$, получим равенства:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} tg\varphi\right) = 0, \ \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0, \ \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Ввиду произвольности угла φ из этих равенств следует, что частные производные функции *f* по всем ее аргументам равны нулю, т.е. *f* не зависит от *x*, *y*, φ и *t*. Следовательно, предположение об интегрируемости связи $\dot{y} = \dot{x} \cdot tg\varphi$ неверно и данная механическая система – неголономная.

Ограничения, налагаемые связями на положения, скорости, ускорения и перемещения точек механической системы

Пусть в механической системе $P_\nu, \nu = 1,2,\ldots,N$, движущейся относительно неподвижной декартовой системы координат *Oxyz*, имеется *r* голономных и *s* неголономных связей[10]:

$$f_\alpha(\bar{r}_\nu, t) = 0, \alpha = 1,2,\ldots,r, \tag{2}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \bar{a}_{\beta\nu} \bar{v}_\nu + a_\beta = 0, \beta = 1,2,\ldots,s. \tag{3}$$

где $\bar{a}_{\beta\nu} = \bar{a}_{\beta\nu}(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_N, t)$, $a_\beta = a_\beta(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_N, t)$. Тогда совместимые со связями положения, скорости, ускорения и перемещения точек системы должны удовлетворять некоторым соотношениям, вытекающим из (2) и (3).

<u>Возможными положениями</u> механической системы в момент времени $t = t^*$ называются такие положения ее точек, для которых радиус-векторы $\bar{r}_\nu = \bar{r}_\nu^*$ удовлетворяют уравнениям геометрических связей (2). Ограничения, накладываемые геометрическими связями на скорости точек, будут иметь вид:

$$\frac{df_\alpha}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \bar{r}_\nu} \cdot \bar{v}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0, \alpha = 1,2,\ldots,r. \tag{4}$$

Совокупность векторов $\bar{v}_\nu = \bar{v}_\nu^*$, удовлетворяющая уравнениям (3) и (4) в возможном для момента времени $t = t^*$ положении системы называется *<u>возможными скоростями</u>* системы для данного момента времени. Дифференцируя равенства (3) и (4) по времени *t* получим аналитические выражения ограничений, накладываемых связями на ускорения точек:

[10] Уравнения (3) – общая форма записи линейных относительно скоростей неголономных связей. Например, неголономная связь $\dot{y} = \dot{x} tg\varphi$ из предыдущей задачи в общей форме будет иметь вид: $\bar{a} \cdot \bar{v} = 0$, где $\bar{a} = [-tg\varphi \quad 1]^T$, $\bar{v} = [\dot{x} \quad \dot{y}]^T$.

$$\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \bar r_\nu}\cdot \bar w_\nu+\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{N}\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial \bar r_\nu \partial \bar r_\mu}\cdot \bar v_\mu\cdot \bar v_\nu+2\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial t\partial \bar r_\nu}\cdot \bar v_\nu+\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial t^2}=0,$$
$$\alpha=1,2,\ldots,r, \tag{5}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N}\bar a_{\beta\nu}\cdot \bar w_\nu+\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{N}\frac{\partial \bar a_{\beta\nu}}{\partial \bar r_\mu}\cdot \bar v_\mu\cdot \bar v_\nu+\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial^2 \bar a_{\beta\nu}}{\partial t}\cdot \bar v_\nu+\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial a_\beta}{\partial r_\nu}\cdot \bar v_\nu+\frac{\partial a_\beta}{\partial t}=0,$$
$$\beta=1,2,\ldots,s. \tag{6}$$

Совокупность векторов $\bar w_\nu=\bar w_\nu^*$, удовлетворяющая уравнениям (5) и (6) при возможных для данного момента времени положениях и скоростях точек системы, называется <u>*возможными ускорениями*</u> для этого момента времени. Если предположить, что $3N-r-s>0$, (в противном случае согласованное со связями движение точек системы было бы невозможно или осуществлялось бы по заранее заданному закону во времени) то для данного момента $t=t^*$ существует бесконечное множество возможных скоростей и возможных ускорений.

Пусть в данный момент времени $t=t^*$ система занимает одно из своих возможных положений $\bar r_\nu=\bar r_\nu^*$ и имеет какие-то возможные скорости $\bar v_\nu=\bar v_\nu^*$ и ускорения $\bar w_\nu=\bar w_\nu^*$. Возможному в момент $t=t^*+\Delta t$ положению системы соответствуют радиус-векторы $\bar r_\nu=\bar r_\nu^*+\Delta\bar r_\nu$ точек системы. Величины $\Delta\bar r_\nu$ называются <u>*возможными перемещениями*</u> системы из ее возможного положения $\bar r_\nu^*$ в момент $t=t^*$. Для достаточно малых Δt возможные перемещения механической системы можно представить в виде суммы:

$$\Delta\bar r_\nu=\bar v_\nu^*\Delta t+\frac{1}{2}\bar w_\nu^*(\Delta t)^2+\ldots,\nu=1,2,\ldots,N.$$

Так как множество возможных скоростей и возможных ускорений бесконечно, то бесконечно и множество возможных перемещений.

Действительные и виртуальные перемещения

Пусть в момент времени $t = t^*$ система находится в положении $\bar{r}^*_{\nu 0}$, а скорости ее точек имеют конкретные возможные значения $\bar{v}^*_{\nu 0}$. Если известны силы, действующие на систему, то, проинтегрировав дифференциальные уравнения динамики, можно получить значения радиус-векторов $\bar{r}_\nu$ для моментов времени *t*, следующих за t^*. Обозначим $dt = t - t^*$. Тогда приращение радиус-векторов точек системы можно представить в виде

$$d\bar{r}_\nu = \bar{r}_\nu(t^* + dt) - \bar{r}_\nu(t^*) = \bar{v}^*_{\nu 0}dt + \frac{1}{2}\bar{w}^*_{\nu 0}(dt)^2 + \ldots, \nu = 1,2,\ldots, N.$$

Величины $d\bar{r}_\nu$ есть *<u>действительные перемещения</u>* точек системы за время *dt*. Действительные перемещения всегда являются одними из возможных. Если предположить, что действительные перемещения системы линейны по *dt*, т.е. $d\bar{r}_\nu = \bar{v}^*_{\nu 0}dt$, то эти перемещения будут удовлетворять уравнениям, вытекающим из (2) и (3):

$$\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \bar{r}_\nu}\cdot d\bar{r}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}dt = 0, \alpha = 1,2,\ldots, r\ , \tag{7}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N}\bar{a}_{\beta\nu}\cdot d\bar{r}_\nu + a_\beta dt = 0, \beta = 1,2,\ldots, s\ . \tag{8}$$

<u>Виртуальным перемещением</u> механической системы называется совокупность величин $\delta\bar{r}_\nu$, удовлетворяющая линейным однородным уравнениям

$$\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \bar{r}_\nu}\cdot \delta\bar{r}_\nu = 0, \alpha = 1,2,\ldots, r\ , \tag{9}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N}\bar{a}_{\beta\nu}\cdot \delta\bar{r}_\nu = 0, \beta = 1,2,\ldots, s\ . \tag{10}$$

где $\frac{\partial f_\alpha}{\partial \bar{r}_\nu}$, $\bar{a}_{\beta\nu}$ вычисляются при $t = t^*$, $\bar{r}_\nu = \bar{r}_\nu^*$. Очевидно, что для склерономной механической системы действительное перемещение будет одним из виртуальных, т.к. связи в склерономной системе явно от времени не зависят.

Числом степеней свободы механической системы называется число ее независимых виртуальных перемещений

$$n = 3N - r - s\,, \tag{11}$$

где r – число голономных и s – число неголономных связей, действующих в механической системе, N – число точек системы.

Задача

Задан жесткий треугольник с вершинами P_1, P_2 и P_3, движущийся в трехмерном пространстве (рис. 8). Найти число степеней свободы треугольника.

Решение

Известно, что точка в трехмерном пространстве имеет три независимых виртуальных перемещения и, следовательно, три степени свободы. Предположим, что вершины треугольника между собой не связаны. Тогда механическая система из трех точек имела бы $3N = 3 \cdot 3 = 9$ степеней свободы. Однако, по условию задачи треугольник жесткий и расстояния между его вершинами постоянны. Это условие записывается тремя аналитическими уравнениями связей

$$|\bar{r}_2 - \bar{r}_1| - r_{12} = 0\,,\ |\bar{r}_3 - \bar{r}_1| - r_{13} = 0\,,\ |\bar{r}_3 - \bar{r}_2| - r_{23} = 0\,,$$

где r_{12}, r_{13} и r_{23} - длины сторон треугольника. Все три уравнения описывают геометрические стационарные связи; следовательно, жесткий треугольник – голономная склерономная система. Имеем: $r = 3$, $s = 0$ и число степеней свободы, согласно (11), $n = 3N - r - s = 3 \cdot 3 - 3 - 0 = 6$. Таким образом, жесткий треугольник (простейшее пространственное твердое тело) имеет шесть степеней свободы.

Обобщенные координаты

Наименьшее число параметров, необходимое для задания возможного положения механической системы, называется *числом ее обобщенных координат*. Так как уравнения связей (2) независимы, то число обобщенных координат

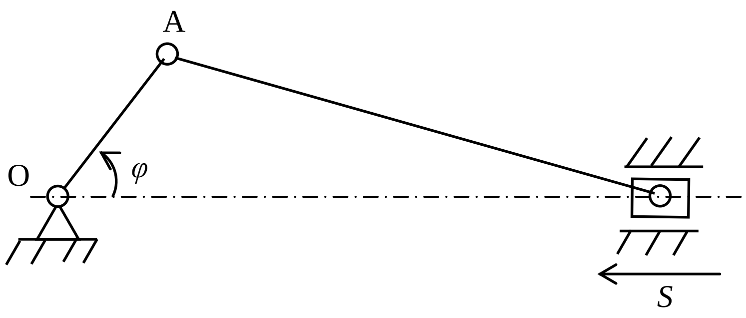
$$m = 3N - r\ . \qquad (12)$$

Из (11) и (12) следует, что число степеней свободы системы в общем случае не равно числу ее обобщенных координат. Равенство $m = n$ имеет место только в случае $s = 0$, т.е. голономной механической системы. Выбор обобщенных координат может быть произвольным; например, за обобщенные координаты можно принять m из $3N$ декартовых координат x_ν, y_ν, z_ν точек механической системы. Однако, как правило, такой выбор практически малопригоден. Можно ввести любые другие m независимых величин $q_1, q_2, \ldots, q_m$, в своей совокупности определяющих конфигурацию системы. Эти координаты могут иметь геометрический смысл расстояний, углов, площадей и т.п. Требуется только, чтобы они были независимы, а радиус-векторы точек можно было представить в виде

$$\bar{r}_\nu = \bar{r}_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_m, t), \nu = 1,2,\ldots, N.$$

При решении конкретных задач механики часто нет необходимости составлять уравнения связей (2). Из физической сущности задачи обычно ясно, как надо выбирать обобщенные координаты в таком количестве, которое необходимо и достаточно для задания возможных положений механической системы.

Задача



Исходные данные:

OA =R м, AB = L м,

$\varphi(t) = \omega t$ *рад*, $\omega = const$.

Рис. 28

Для кривошипно-ползунного механизма, изображенного на рис. 28, определить закон движения *S(t)* ползуна *B* и вычислить его скорость.

Решение

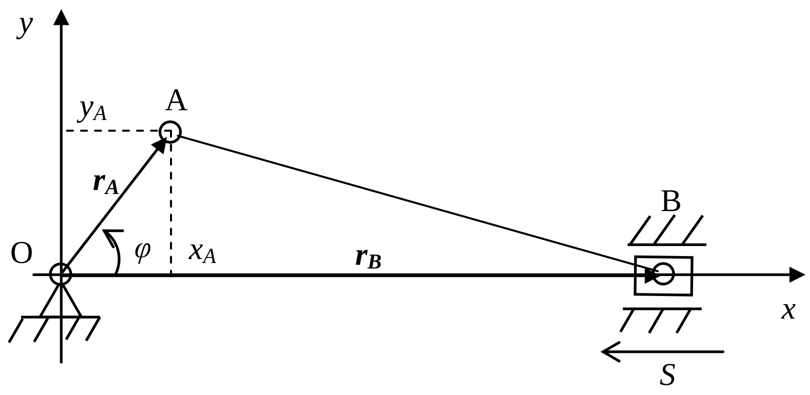


Рис. 29

Введем неподвижную декартовую систему координат Oxy, поместив ее начало на оси вращения кривошипа OA (рис. 29). Рассмотрим движение шарниров A и B. Шарнир A движется по окружности радиуса R относительно оси O. Следовательно, его возможные положения определяются равенством

$\bar{r}_A = [x_A \quad y_A]^T = [R\cos\varphi \quad R\sin\varphi]^T$. Шарнир B движется поступательно вдоль оси x. Его положение определяется радиус-вектором $\bar{r}_B = [x_B \quad y_B]^T = [x \quad 0]^T$. Шарниры A и B связаны между собой шатуном, поэтому расстояние между ними всегда равно L. Это условие определяется уравнением связи $(\bar{r}_B - \bar{r}_A)^2 - L^2 = 0$. Подставляя в последнее уравнение соотношения для $\bar{r}_A$ и $\bar{r}_B$, получим

$$(x - R\cos\varphi)^2 + (-R\sin\varphi)^2 - L^2 = 0,$$

откуда следует квадратное уравнение относительно x:

$$x^2 - 2R\cos\varphi \cdot x + R^2 - L^2 = 0.$$

Полученное уравнение имеет два решения: $x_1 = R\cos\varphi + L\sqrt{1 - \frac{R^2}{L^2}\sin^2\varphi}$, $x_2 = R\cos\varphi - L\sqrt{1 - \frac{R^2}{L^2}\sin^2\varphi}$. Очевидно, что решение x_1 соответствует механизму, изображенному на рис. 29. Решение x_2 соответствует случаю, когда ползун B движется в отрицательной области значений x. Следовательно, $S(\varphi) = x_1 = R\cos\varphi + L\sqrt{1 - \frac{R^2}{L^2}\sin^2\varphi}$ и $S(t) = R\cos\omega t + L\sqrt{1 - \frac{R^2}{L^2}\sin^2\omega t}$. Скорость ползуна B найдем, продифференцировав по времени t закон движения $S(t)$:

$$v(t) = \frac{dS(t)}{dt} = -\omega \cdot \left(R\sin\omega t + \frac{R^2 \sin 2\omega t}{2L\sqrt{1 - \frac{R^2}{L^2}\sin^2\omega t}} \right).$$

Рассмотренный метод, основанный на аналитическом описании наложенных на точки механической системы связей, часто позволяет получить решение сложной задачи без необходимости выполнения геометрических построений. При этом точность вычисления искомых величин будет зависеть только от точности представления исходных данных, так как эти величины отыскиваются в виде аналитических зависимостей. Решим задачу, приведенную в п. 2.7, используя аналитическое описание связей.

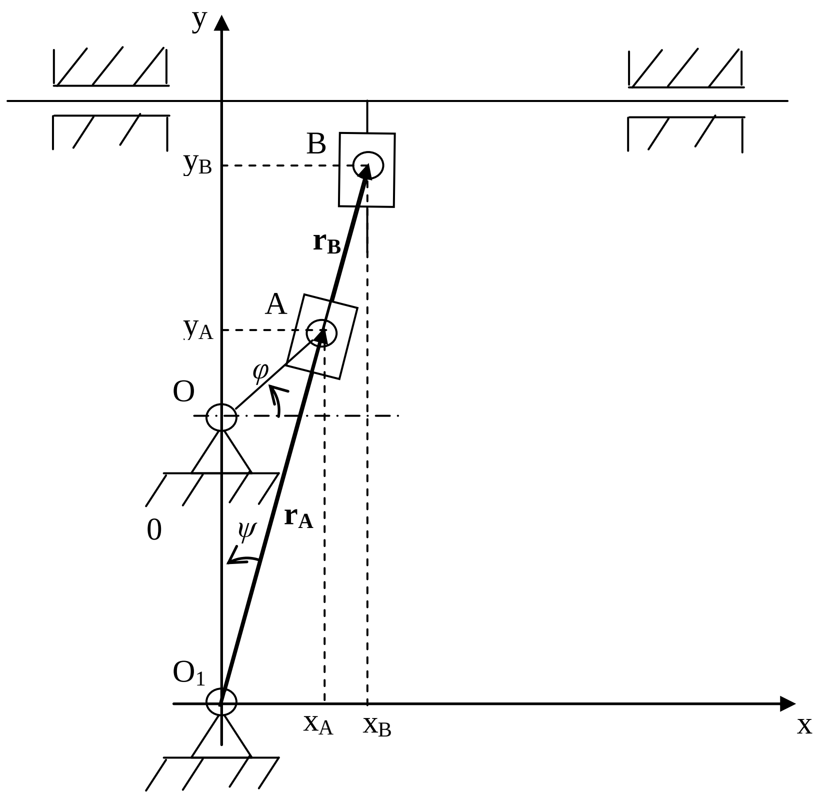


Рис. 30

Обозначим R – радиус кривошипа OA, a – расстояние O_1O, L – длина кулисы O_1B. Введем декартовую систему координат O_1xy, связанную с неподвижной стойкой механизма (рис. 30). Тогда радиус вектор $\bar{r}_A$, задающий положение шарнира А будет определяться равенством:

$$\bar{r}_A = \begin{bmatrix} x_A & y_A \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} R\cos\varphi & a + R\sin\varphi \end{bmatrix}^T.$$

Следовательно, $\sin\psi = \dfrac{x_A}{r_A} = \dfrac{x_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2}} = \dfrac{R\cos\varphi}{\sqrt{R^2 + a^2 + 2aR\sin\varphi}}$ и

$$x_B = L\sin\psi = \frac{LR\cos\varphi}{\sqrt{R^2 + a^2 + 2aR\sin\varphi}}.$$

Согласно условию задачи $\varphi(t) = \omega \cdot t$, $\omega = const$, поэтому закон движения суппорта станка $x_B(t) = \dfrac{LR\cos\omega t}{\sqrt{R^2 + a^2 + 2aR\sin\omega t}}$.

Скорость суппорта найдем, продифференцировав по времени t закон движения $x_B(t)$:

$$v_B(t) = -\omega LR\frac{(a + R\sin\omega t)(a\sin\omega t + R)}{(R^2 + a^2 + 2aR\sin\omega t)^{3/2}}.$$

Повторно продифференцировав полученное равенство, найдем ускорение суппорта:

$$w_B(t) = -\omega^2 LR\frac{(aR^3 + a^3R)\sin\omega t - R^2a^2\cos\omega t + R^4 + a^4}{(R^2 + a^2 + 2aR\sin\omega t)^{5/2}}\cos\omega t.$$

Теперь, подставив в полученные выражения $\omega \cdot t = 0$, что соответствует положению механизма в задаче п. 2.7, и исходные данные, получим:

$$v_B(0) = -\omega LR\frac{aR}{(R^2 + a^2)^{3/2}} = -4 \cdot 0.6 \cdot 0.1 \cdot \frac{0.3 \cdot 0.1}{0.1^{3/2}} \approx -0.23 м/с,$$

$$w_B(0) = -\omega^2 LR\frac{-R^2a^2 + R^4 + a^4}{(R^2 + a^2)^{5/2}} = -4^2 \cdot 0.6 \cdot 0.1 \cdot \frac{-0.1^2 \cdot 0.3^2 + 0.1^4 + 0.3^4}{0.1^{5/2}} \approx -2.22 м/с^2.$$

Значения скорости и ускорения суппорта показывают, что в рассматриваемый момент времени суппорт движется с ускорением в обратном по отношению к оси *x* направлении. Эти значения соответствуют результату, полученному графическим методом в п. 2.7. Разница в сотых долях объясняется погрешностями, неизбежными при выполнении графических построений. Таким образом, применение метода, основанного на аналитическом описании связей, позволило не только существенно сократить решение, но и получить более точные результаты. Кроме того, для вычисления кинематических параметров суппорта в любой другой момент времени достаточно подставить в формулы для $v_B(t)$ и $w_B(t)$ соответствующее значение t.

Вопросы для проверки усвоения материала

1) Дайте определение понятию «механическая система».
2) Что в механической системе называется связями?
3) Какие связи называются геометрическими? Приведите примеры механических систем с геометрическими связями.
4) Какие связи называются неголономными? Приведите пример механической системы с неголономной связью.
5) Как в соответствии с классификацией можно назвать связи, наложенные на точки абсолютно твердого тела?
6) Что называют возможными положениями, скоростями и ускорениями механической системы?
7) Что называют возможными перемещениями механической системы?
8) В чем различие между возможным и действительным перемещением механической системы?
9) Что называют виртуальными перемещениями механической системы?
10) В чем различие между числом степеней свободы и числом обобщенных координат механической системы? В каком случае эти числа равны?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики, т. 1 (кинематика, статика, динамика точки). – М.: Наука, 1977. – 480 с.
2. Маркеев А.П. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1990. – 416 с.
3. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: Учебное пособие. – 36-е изд., исправл. / Под ред. Н.В. Бутенина, А.И. Лурье, Д.Р. Меркина. – М.: Наука, 1986. – 448 с.
4. Ольховский И.И. Курс теоретической механики для физиков. – М.: Наука, 1970. – 447 с.